はじめに

※ 717– 000 – 001

数学のトリセツＩＡをお手にとっていただきありがとうございます。本書は一般的な参考書や問題集と少し趣向が異なります。後述しますが，数学において重要なことは，徹底した基本の理解です。ですから，単なる問題集ではなく，導入の部分も詳しく解説していますので，数学が苦手な人にとってもスムーズに取り組んでいけるよう配慮してあります。また，数学が得意であっても，「応用問題になると解けない！」という，いわゆる「伸び悩み」状態の人にとっても，本書はその助けになるでしょう。数学が伸び悩む原因は，基本の理解が不十分であること以外にありません。本書では，基本の徹底した理解を目標にしています。本書を通じて，確固たる基本が確立できれば，応用問題や入試問題に取り組む際にもストレスなく進んでいけるでしょう。学校の授業のお供として，塾や予備校の教材のパートナーとして，あるいは，メインの教材として活用できるものになっています。

本書の最大の特徴は，導入から問題演習に至るまで，全てに動画解説が付いていることです。多くの受験生を指導した私自身が本書を執筆し，解説講義をしています。世の中には，簡単な問題をわかりやすく解説することで，一見「わかった気になる」無料の解説動画が溢れていますが，本質的な数学力の向上には程遠いと私は感じています。本書では，とても簡単な問題から入試問題まで幅広く扱っています。わかった気にさせるのではなく，しっかりと「できる」状態まで引き上げますので，安心して取り組んでください。

また，世の中の参考書や問題集を「学校の補助教材」と「受験対策用」にざっくり分けるとすれば，本書は後者になるでしょう。しかし，学校で習っている数学も受験で扱う数学も，同じ「数学」という学問であることに変わりはありません。本書では「教科書には載っていないけど，受験生ならば押さえておくべき事柄」についても，多く取り扱っていますが，それらは決して，学校で習う数学の理解を妨げるものではありませんので，意欲的に取り組んでほしいと思います。

本書に取り組んでいただく前に，この教材ができた背景について触れたいと思います。現在，世の中には多くの数学の参考書や問題集が溢れています。そして，そのどれもが非常によく作られており，取り組む価値の高いものばかりです。私自身も，受験生時代にはいくつかの参考書や問題集に取り組み，受験生に数学を教える仕事を始めてからも，数多くの本を手に取り，自分の講義へ活用してきました。

しかしながら，そのように良書が溢れているにもかかわらず，世の中には一定数の「数学を苦手とする受験生」が存在します。当然，やる気のない受験生は，どのような本を手に入れても成果が上がることはないでしょう。しかし，「やる気もあるし，努力もしているのに，数学ができるようにならない人」が存在するというのは，少し不思議な気もします。「やる気はあるのにできるようにならない」人のために，本書

は生まれました。私はこれまでに，未就学児童から大学生まで数多くの児童・生徒・学生に算数や数学を教えてきました。そして，多くの数学嫌いを解決してきた経験があります。本書を通じて，その方法を皆さんに伝えていきます。

やる気があるのに数学ができない人は，「よし，やってみよう！」→「何から始めていいかわからないから，とりあえずみんなが使っている参考書や売れている問題集に手を出す」→「でもわからない，できるようにならない」→「やる気がなくなる」という流れを辿り，テストや入試など，必要に迫られてまた振り出しに戻ります。このループを繰り返すことで「自分は数学が苦手だ，数学が嫌いだ。」という考えに至ります。これまで，やる気のある人がなぜ伸びなかったのか，原因は以下の点にあると考えています。

① 本だけ（文字だけ）の参考書や問題集には理解できない箇所が多くある。

② 必要最小限すぎて，大切な部分の説明が足りない。

③ 表現がわかりづらい。

これらを解決することを念頭に置いて，教材の開発を行いました。本書は，この本だけでも教材として十分な機能がありますが，それでも数学をちゃんとできるようになるためには，つまり，上記の ① 〜 ③ を解決するには，映像や音声の力を借りた方が何倍も効果的です。むしろ，これだけインターネットが普及し，気軽に映像を視聴することができる現代において，映像を活用しないのはあまりに勿体無いことだと思います。もちろん，すべての本に動画をつけるべきとは思っていません。小説は文字だからこその楽しさがあり，図鑑は創造を膨らませる楽しさがあります。漫画のように自分のペースで物語の展開を楽しむことも，本ならではの良さでしょう。しかし，学習本，特に数学の参考書や問題集に関しては，映像講義をつけることは「百利あって一害なし」でしょう。

そうとはいえ，映像をつけるためには，多くのコストと手間がかかります。この本は，教育の世界を変えたいという熱い意志を持った仲間たちの協力によって生まれました。私たちの描く教育の未来に賛同してくださった，企業や個人が多大なる協力をしてくれたおかげで本書は生まれました。純粋な教育に対する思いが集まって，「映像をつける」という簡単なようで難しい課題を解決することができたのです。映像に関しては撮影用のスタジオを用意し，映像制作のプロに手伝ってもらいました。広告が入る無料の動画視聴サイトを利用せず，自分達でサーバーを準備し，アプリを用意しました。既存の映像講義を元にして本を作ったのではなく，本を書いてから専用の動画を撮り下ろしました。また，私の教え子たちから貴重な意見をもらい，現在も学校や予備校で数学を教えている先生たちからも意見をもらいました。

様々な「意識熱い系」の仲間たちの協力で，この本の出版に至りました。これまでにない新しい勉強の取り組みを，ぜひ体感してください。

この本をきっかけにして，1 人でも多くの「数学で悩んでいる人」が救われることを心から願っています。そして，いつか我々と一緒に，教育の世界を変える仲間として，同士に加わってくれることも，密かに願っています。

数学の勉強の仕方

※ 717‒ 000 ‒ 002

さて，本書を手に取り，早速取り組もうとしている人も多いかもしれませんが，ちょっと待ってください。何事も，取り組む前の準備が大切です。そもそも「数学」ってどういう学問なのか。そして，どうやったらできるようになるのか。それらを確認してから，本腰を据えて取り組んでいくことにしましょう。ぜひ動画を視聴してみてください。

数学とはコトバ

みなさんが学習している数学というのは，日本語や英語と同じ，言語の１つです。数学は物理や化学などサイエンスの世界で使われる共通言語なのです。サイエンスの世界は，何も学校で習う「理科」だけではありません。経済学や社会学などもサイエンスです。では，なぜ数学という言語をサイエンスの世界では使っているのか。それは，唯一解釈の多様性のない言語だからです。私たちが使っている自然言語は，状況に応じて解釈の違いが生まれます。「とても速いスピードで物体が横切った」という文を読んだとき，「とても速い」というのは人によって解釈が違うでしょう。数学という人工言語は，解釈の多様性がなく，文化や状況を超えて，すべての人が平等に理解できる唯一の言語なのです。ですから，正確性が必要なサイエンスの世界では数学というコトバが使われることになるのです。

さて，皆さんは言語を学習するときは，どのように学習していますか？ 英語を例にとって考えてみるとわかりやすいと思いますが，まずは単語や熟語を覚え，文法を学習し，アウトプットを繰り返していくことでしょう。数学も同じです。定義や定理・公式をしっかり覚え，問題による解き方を学習し，アウトプットを繰り返すことで，できるようになっていくのです。

英語ができない人は，まず語彙力が足りないことが多いでしょう。数学ができない人は，定義や定理・公式をしっかり覚えていないことが原因になっています。また，英文法を理解していないと英語の理解が難しいように，数学においても問題の解き方を理解していないと，当然スムーズに解くことができません。結局は，数学を学習する姿勢は英語の学習と同じです。

皆さんは，日本語をすでに習得していますね。そうであるならば，数学という言語の理解は必ずできます。しっかりとした学習の仕方を学べば，数学というのは全員が正しく扱えるようになる素晴らしい言語なのです。

数学のトリセツの取扱説明書

※ 717– 000 – 003

本書は，「Introduction」と「演習問題」に分かれています。Introduction では，その単元で扱う用語や重要事項などをまとめてあります。一読して理解があやふやなものは動画で理解を深めてください。演習問題では，その単元の重要な問題を用意してあります。すべての問題が解けるようになるまで，繰り返し取り組んでください。

トリセツの巻末解説について

トリセツのすべての演習問題には解説が付録してありますが，これらは最低限のことしか記していません。計算過程や記述も最小限に抑えています。ある程度数学ができるようになってくると，冗長な解説は不要なので，あえてそのようにしています。解説を一読し，わからないことがあれば解説動画をぜひ活用してください。

わからない箇所に関して，時間をかけて自分の力で理解をすることも，数学の力をつける意味ではとても大切です。本書に掲載している問題は「見た瞬間に解法が思い浮かぶ状態」になることが重要ですので，あまり時間をかけずに短期間で全範囲の学習を終えてほしいと思います。「巻末の解説があれば十分！」と自信を持って言えるようになれば，あなたはすでに数学Ｉ A の基礎は完璧になっていると断言します。

初めて数学Ｉ A を学習する人

本書を手元に置いた状態で，Introduction から動画の視聴を始めてください。専用のノートも準備をして，学校の授業のように板書をノートに取りながら講義を視聴してください。

各章の Introduction で新しく学習する単元の導入を行います。その後，演習問題に取り組んでいきましょう。解答・解説を確認して，解説の理解が曖昧な場合は，解説動画を視聴してください。

既習単元の演習をしたい人

演習問題から取り組んでみましょう。解けない問題は各章の Introduction を確認し，解答・解説を読んでみましょう。それでも理解があやふやな場合は解説動画を視聴しましょう。また，解説動画の理解が難しい場合は，各章の Introduction の動画も視聴してみてください。きっと演習問題の解説が理解できるようになるでしょう。

目次

CONTENTS

第1章 数と式

第2章 ２次関数

第3章 図形と計量・図形の性質

第4章 データの分析

第5章 場合の数と確率

第6章 整数の性質

補足：授業内で使う記号と意味

記号	意味	記号	意味
$\therefore$	ゆえに	$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\because$	なぜならば	$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	$\blacksquare$	証明終了

数と式 1

　第 1 章では数と式という単元を扱います。皆さんはスポーツに本格的に取り組んだことはありますか？ どんなスポーツでも，ハイレベルなトレーニングをこなすためには体力が不可欠です。サッカーの練習をしようと思っても，50m 走っただけでバテてしまうようでは高度なトレーニングはできないでしょう。数学も全く同じで，今後出てくる高度な数学理論を学習するためには，数学における体力である「計算力」が必要となります。その計算力をつけるのがこのセクションです。

「数と式」は高校数学の一番はじめに扱う単元なのですが，扱う量が非常に多く，教科書では大きく 4 つの節に分かれています。「技術を習得する前に，まず，体力！」と言わんばかりに，大量の問題を通して数学体力をつけ，今後現れる高度な数学に備えるわけですが，数学が苦手な人やあきっぽい人にとっては，いきなり最大の関門にぶち当たることになります。事実，多くの高校生が「中学数学とは全然違う！ 高校に入ったら，いっきに難しくなった！」と悲痛な叫びをあげています。

　こんなことを言うのは不謹慎かもしれませんが，この単元は「適当に流す」ことが大切です。本当に必要なことのみをピンポイントで学習し，ちょっとメンドクサイものは後から必要に応じて学習するのが最も効率的でしょう。

　本書では，教科書の流れに目を瞑り，必要最低限の知識と技術のみを押さえていきます。なので，ひょっとしたら学校の定期テストなどに出題される，いわゆる応用問題を解くことができないかもしれません。定期テストが気になる人は，学校で扱う問題集等も同時に取り組みましょう。「定期テストは最低限の点数が取れれば OK！」という人は，順番に第 2 章，第 3 章と進んでください。

　この章では，本当に必要なことのみをピンポイントで学習していきます。逆を言えば，この章で扱っている内容は，本当に必要なことしか紹介していませんので，石にかじりついてでも全てマスターしてください。

中学数学の復習

まずは基礎となる用語の確認からしておきましょう。用語自体が特に重要というわけではなく，問題文で出てきたときや，授業で先生が用いるときに意味がわからないと困ってしまいますね。なので，これらの用語は「どういう意味か」をしっかりと覚えるようにしましょう。

単項式，次数，係数

717- 011 - 001

x^2, $-3x^2y^3$ のように，数といくつかの文字の積で表される式を**単項式**といいます。単項式において，かけられている文字の個数を**次数**，文字以外の部分 (文字の前にある数字) を**係数**といいます。

$\mathbf{-3x^2y^3}$ 係数は -3 →	x を 2 個，y を 3 個かけ合わせているので，次数は 5 となる。

※ 1）係数が 1, -1 のとき，それらの 1 はかきません。

（例） $1x^2 \to x^2$，$-1ab^2 \to -ab^2$

※ 2）2 種類以上の文字を含む単項式においては，ある特定の文字に注目して次数や係数を考えることがあります。たとえば，$-3x^2y^3$ に関しては，

x に注目すると，次数は 2，係数は $-3y^3$ となり，

y に注目すると，次数は 3，係数は $-3x^2$ となります。

Ex.1 次の単項式の係数と次数を答えよ。ただし，(3) は x の式として考えるものとする。

(1) $-ab$　　(2) $\dfrac{2}{3}x^2y$　　(3) ax^3y

多項式，整式，同類項

717- 011 - 002

$x^3+2x^2y-3y^2$ という式は，x^3, $2x^2y$, $-3y^2$ を足した式です。このように，いくつかの単項式の和の形で表された式を，**多項式**といいます。また，この多項式の x^3, $2x^2y$, $-3y^2$ を**項**といいます。多項式で x^2+3 の 3 のように，文字がついていない項のことを**定数項**といいます。

この，単項式と多項式を合わせて**整式**と呼びますが，単項式を「項が 1 つの多項式」と考え，多項式と整式はしばしば同じ意味合いで用いられます。

また，$2x^2y+3x^2y=(2+3)x^2y=5x^2y$ のように文字部分が同じであれば，係数は足すことができ，この文字部分が同じ項を**同類項**といいます。

整式に含まれる項の次数のうちで，最大のものをその整式の**次数**といい，次数が n の整式を **n 次式**といいます。たとえば，x^3+2x^2+x-3 は３次式であり，$x^3y+xy+y^2$ は４次式です。ただ，単項式のとき同様，$x^3y+xy+y^2$ は x に注目すれば３次式になり，y に注目すると２次式となります。

「特定の文字に注目して考えることなんてあるの!?」と疑問を持つ人がたまにいるのですが，あります！「どんな場面で!?」という答えは，問題を通して学んでいきましょう。

なお，定数項は次数が０と考えます。

降べきの順　717－011－003

整式は，しばしば各項の次数の順番がバラバラに並んでいるときがあります。たとえば，$3x^2+4x^4-2-x^3+5x$ という式があった場合，各項の次数は順に２，４，０，３，１となっています。

このようなときは通常，次数の高い順に並び替えます。この順を**降べきの順**と呼びます。降べきの順に並び替えると，この式は $4x^4-x^3+3x^2+5x-2$ という並びになります。

指数法則　717－011－004

下記の指数に関する約束事は，今後ずっと使いますので改めて習得しておきましょう。

指数法則

① $a^ma^n=a^{m+n}$

② $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^nb^n$

Ex.2　次の計算をせよ。

(1) $2x^3\times 6x^2$　　(2) $\dfrac{9x^3y^4z^2}{3xy^2z}$

(3) $4a^3bc^2\times(-3a^4b^3c^2)$　　(4) $(-2x^2y)^3\times(3xy^3)^2$

展開と因数分解　717－011－005

下記公式は，中学で学習している展開と因数分解の公式です。左から右の計算が展開，右から左の計算が因数分解になっています。

展開と因数分解

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
④ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

平方根　717－011－006

2 乗して a になる数を，a の**平方根**といいます。たとえば，「4 の平方根」は「± 2」です。しかし，有理数（整数や分数）の範囲で表せないものもあります。たとえば，「5 の平方根」は有理数では表せません。このようなときは，$\sqrt{}$（ルート）という記号を用いて，$\pm\sqrt{5}$ と表します。正の値の場合は，$\sqrt{5}$ のように「+」を省略してかくことは文字式のルールと同じです。そして，文字式と同じように，$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-\sqrt{5}$ という同類項の計算もできます。

また，当然 $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ となります。ルートの中身は，「2 乗してその数になる」わけですから，マイナスの数にはなりません。$\sqrt{-2}$ や $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ などはあり得ないということです。

Ex.3　次の数の平方根を求めよ。(「2 乗してその数になるものを求めよ」ってこと！)

(1) 121　　(2) 225　　(3) 64　　(4) 625

【1】 ❖ 717－012－001

2つの整式 $A=2x^2-5x-7$, $B=x^2-4x-3$ について, $C=4A-8B-3(A-2B)$ を計算せよ。

【2】 ❖ 717－012－002

次の式を計算せよ。

(1) $(-8a)\times\left(-\frac{1}{4}a^2\right)^2\times(-2a)^3$　(2) $\left(-\frac{1}{3}a^2b\right)^3\times(-3ab^2)^2$

【3】 ❖ 717－012－003

次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)^2$　(2) $(t-4)^2$　(3) $(x+y)(x-y)$
(4) $(x+3)(x+2)$　(5) $(t-2)(t+4)$　(6) $(y+3)(y-7)$
(7) $(x-5)(x-6)$

【4】 ❖ 717－012－004

次の式を因数分解せよ。

(1) x^2+4x+4　(2) x^2-6x+9　(3) x^2-25y^2　(4) x^2+5x+6

【5】 ❖ 717－012－005

次の数の平方根を求めよ。

(1) 5　(2) 17　(3) 23　(4) 49　(5) 1600

【6】 ❖ 717－012－006

次の数を，根号（$\sqrt{\ }$のこと）を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{16}$　(2) $\sqrt{2304}$　(3) $-\sqrt{100}$　(4) $\sqrt{(-5)^2}$
(5) $-\sqrt{(-18)^2}$

【7】 ❖ 717－012－007

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ を利用し，次の計算をせよ。なお，根号は簡単な形に直せ。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

(2) $-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

(3) $-\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{7}\right)$

(4) $-\sqrt{42}\div\left(-\sqrt{6}\right)$

(5) $\sqrt{14}\times\sqrt{2}\div\sqrt{7}$

(6) $\sqrt{28}\div\left(-\sqrt{6}\right)\times\sqrt{3}$

【8】 ❖ 717－012－008

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$ を利用し，次の式を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Section 1 展開と因数分解

展開　717－011－007

展開公式

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

③ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

※）実は，他にも展開公式はありますが，ほとんどが因数分解での活用のため割愛します。

Ex.1 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2y+3)^2$　(2) $(x+2)^3$　(3) $(x-5)^3$

因数分解　717－011－008

因数分解公式

① $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

② $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

③ $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Ex.2 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+8　(2) x^3-64　(3) $x^3+3xy+y^3-1$

たすきがけ　717－011－009

扱いが少々特殊なものとして，

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

のタイプの因数分解があります。これは，この公式を覚えていても何の役にも立ちません。通称「たすきがけ」と呼ばれる右の手法を用いて因数分解をします。

$$\begin{array}{cccc} a & & b & \Rightarrow \; bc \\ & \times & & \\ c & & d & \Rightarrow \; ad \\ \hline ac & & bd & ad+bc \end{array}$$

Ex.3 $3x^2+7x+2$ を因数分解せよ。

【9】 ※ 717– 012 – 009

次の式を展開せよ。

(1) $(a+3b-c)^2$　(2) $(a+3)^3$　(3) $(2x-y)^3$

【10】 ※ 717– 012 – 010

次の式を展開せよ。

(1) $(x+y+z)(x-y-z)$
(2) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+3)$
(3) $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)$
(4) $(p+2q)^2(p-2q)^2$
(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
(6) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

【11】 ※ 717– 012 – 011

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-27　(2) $64a^3+125b^3$　(3) $8a^3+27b^3$
(4) $64x^3-1$

【12】 ※ 717– 012 – 012

次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+3x+1$　(2) $4x^2-15x+9$　(3) $6x^2-5x-6$
(4) $3x^2-2xy-y^2$　(5) $3a^2-14ab+8b^2$　(6) $4x^2+7ax-2a^2$

【13】 ※ 717– 012 – 013

次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$　(2) x^2-y^2+4y-4
(3) x^4-10x^2+9　(4) $x^3+6x^2+12x+8$
(5) x^3+x^2-4x-4

【14】 ※ 717– 012 – 014

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(3) $(x+y)^4-(x-y)^4$

【15】 ※ 717– 012 – 015

次の式を因数分解せよ。

(1) $9b^2+3ab-2a-4$

(2) $x^3-x^2y-xz^2+yz^2$

(3) $1+2ab+a+2b$

【16】 ※ 717– 012 – 016

次の式を因数分解せよ。

(1) $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

(2) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$

Section 2 実数

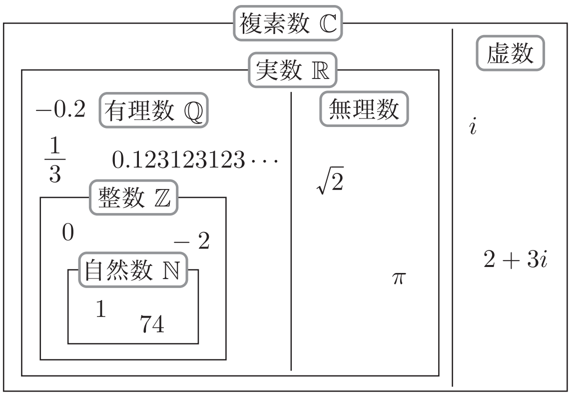
これまで，1, 2, 3, . . . という自然数や，$\frac{1}{3}$ や 0.2 といった分数，小数，そして $-1, -2$ といった整数全体を学習してきましたね。さらに，$\sqrt{2}$ や π といった，特殊な数まで学習してきました。もし，数の世界を宇宙に例えるならば，実はこれらの数は宇宙の中の「太陽系」といった，限られた世界の数なのです。数学IIでは，数の宇宙全体である「複素数」を学習し，さらに数の世界を広げていきます。これによって数学の世界，もっといえばサイエンスの世界はどんどん広がっていきます。

数の分類　717-011-010

それでは本格的に数を分類していきましょう。有理数というのはとても簡単で「分数で表すことのできる数」です。その中には整数や自然数も含まれますが，たとえば，-2 という数も $-\frac{2}{1}$ とすれば分数で表すことができます。このように，分数で表すことのできる数が有理数です。そして，無理数とは「分数で表すことのできない数」です。「分数で表せない数は全部無理数！」と覚えておきましょう。

※ 1）「分数で表す」というのは，正確に表現すると，分母，分子ともに整数である分数という意味です。

※ 2）整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ などと表します。このような，集合を表す文字は太字になっています。



※ 3）複素数，虚数は，数学IIで学習します。

循環小数　※ 717−011−011

小数には，小数点以下が無限に続く小数があります。たとえば，円周率 $\pi = 3.141592653\cdots$ や，$\dfrac{1}{3} = 0.33333\cdots$ のような小数です。これらの小数は**無限小数**と呼ばれており，対して，$\dfrac{1}{8} = 0.125$ のように，無限に続かない小数は**有限小数**と呼ばれています。

さて，いくつかの無限小数は，小数点以下が規則的に並んでいるタイプのものがあります。$0.123123123\cdots$ や $0.33333\cdots$ のように，小数点以下が，ある規則で繰り返されているような小数を**循環小数**といいます。循環小数は，繰り返す部分の数字の上に「$\dot{}$」をつけて表します。たとえば，

$$0.123123123\cdots = 0.\dot{1}2\dot{3},\quad 0.33333\cdots = 0.\dot{3}$$

となります。循環小数は，必ず分数で表すことができます。例を用いて考えてみましょう。

《例 2—1》

$0.123123123\cdots$ を，分数で表せ。

〈解答〉

$x = 0.123123123\cdots$ とする。123 の部分が繰り返されているので，ここをうまく消すように考えてみる。

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 123.123123123\cdots \\ -) & x = & 0.123123123\cdots \\ \hline & 999x = & 123 \end{array}$$

$1000x = 123.123123123\cdots$ であるから，図のように差をとると，$999x = 123$ となる。よって，$x = \dfrac{123}{999} = \dfrac{41}{333}$ であることがわかる。

【17】 ※ 717–012–017

次の式を簡単にせよ。

(1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{48}+\sqrt{147}$

(2) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

【18】 ※ 717–012–018

次の数の大小を調べよ。

(1) $5\sqrt{7}$，13

(2) $3+\sqrt{20}$，$\sqrt{56}$

【19】 ※ 717–012–019

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}$

(2) $0.\dot{1}\dot{2}$

(3) $0.\dot{6}4\dot{8}$

(4) $6.\dot{5}\dot{4}$

Section 3 式の値，解と係数の関係

対称式の定義

※ 717-011-012

どの 2 文字を入れ替えても，式が変わらない式を対称式といいます。たとえば，$x^3+5xy+y^3$ という式の x，y を入れ替えてみましょう。

⇩元の式と同じ！

$$\boxed{x^3+5xy+y^3} \xrightarrow{x,\ y\text{ を入れ替える}} \boxed{y^3+5yx+x^3}$$

すると，$y^3+5yx+x^3$ となったのですが，$y^3+5yx+x^3=x^3+5xy+y^3$ となるので，これは元の式を並び替えただけで，同じ式です。このような式を**対称式**といいます。

基本対称式

※ 717-011-013

まずは 2 文字（x と y）の対称式を考えてみましょう。すべての x，y の対称式は $x+y$ と xy のみで表すことができます。この $x+y$ と xy のことを，**基本対称式**といいます。

たとえば，x^3+y^3 という式は，$(x+y)^3-3xy(x+y)$ という式で表されます。この式は，$x+y$ と xy のみで表されていることがわかります。これがどんな威力を発揮するかは，問題を通して確認してもらうとして，まずは有名な対称式をまとめておきますので，しっかりと覚えておきましょう！

有名対称式 その 1

① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

また，3 文字（x と y と z）の対称式もあります。この場合は，基本対称式が $x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz の 3 つで，これらを用いて表現することができます。

有名対称式 その 2

③ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

④ $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

※）④ の対称式の変形に $x^2+y^2+z^2$ という式が入っているので「基本対称式で表していないじゃん！」とツッコみたくなると思いますが，それは ③式を利用することで，基本対称式のみで表すことができます。

解と係数の関係

717－011－014

本来は数学Ⅱで学習する内容である「**解と係数の関係**」を学習しましょう。仕組みは中学学習内容でも理解ができます。数学ＩＡの範囲外ではありますが，２次方程式においては非常に重要な内容です。

２次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ ……① の２解を $x=\alpha,\ \beta$ とします。

このとき，① は，

$$① \Leftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

と考えることができ，② を展開すると，

$$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0 \quad \cdots\cdots ③$$

となります。

① と ③ は同じ２次方程式なので，各項の係数を比較すると，

$$b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$$

となります。これより，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が得られます。

解と係数の関係

２次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の２解を $x=\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

Ex.1 次の２次方程式について，２つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2+2x-5=0$　(2) $3x^2-5x+7=0$

(3) $-3x^2+11x-4=0$　(4) $2x^2+3=0$

Ex.2 ２次方程式 $x^2+2x+3=0$ の２つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$

Ex.3 ２次方程式 $x^2-8x+m=0$ の１つの解が他の解の３倍であるとき，定数 m の値と２つの解を求めよ。

【20】 ※ 717–012–020

$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2

(4) x^3+y^3　(5) x^4+y^4　(6) x^5+y^5

【21】 ※ 717–012–021

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　(2) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$　(3) $\dfrac{1}{xy^3}+\dfrac{1}{x^3y}$

【22】 ※ 717–012–022

2 次方程式 $x^2+4x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(4) $\alpha^3+\beta^3$

【23】 ※ 717–012–023

$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$　(4) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

【24】 ※ 717–012–024

$x+y+z=-2$，$xy+yz+zx=-4$，$xyz=1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

(4) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$

【25】 ❖ 717–012–025

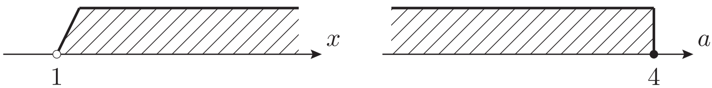
2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解を α，β とするとき，次の 2 つの数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。ただし，係数はすべて整数とする。

(1) $-\alpha$，$-\beta$　　(2) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　(3) $2\alpha+1$，$2\beta+1$

Section 4 1次不等式

不等式と数直線 ❖ 717-011-015

すでに学習している人も多いと思いますが，改めて不等式というものについて学習しましょう。たとえば，$x > 1$ は「x は 1 よりも大きい数」という意味であり，$a \leqq 4$ は「a は 4 以下の数」という意味になります。このように，不等号と呼ばれる記号（$>$ や $\leqq$）を用いて，大小関係を表す式を**不等式**といいます。不等式は，数直線を用いて表すと，下のように視覚化できて便利です。



上のように，「$<$」や「$>$」などは，○で表し，線を斜めにすると見やすくなります。逆に，「$\leqq$」や「$\geqq$」などは，●で表し，線を垂直にかくと，数直線をかいたときに見やすくなります。ちなみに，各記号の読み方は，

「$>$」：大なり，「$<$」：小なり，「$\geqq$」：大なりイコール，「$\leqq$」：小なりイコール

です。

1次不等式の計算 ❖ 717-011-016

a，b，c を実数としたとき，不等式に関して，

① $a < b$ のとき，$a + c < b + c$，$a - c < b - c$

② $a < b$ かつ $c > 0$ のとき，$ac < bc$，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

③ $a < b$ かつ $c < 0$ のとき，$ac > bc$，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

が成り立ちます。重要なのは ③ で，両辺にマイナスの数をかけたり，割ったりした場合，不等号の向きが逆になります。それ以外の場合は，等号 $(=)$ と同じように扱うことができるのです。

例題で確認していきましょう。方程式と同じように解いていきますが，負の数をかけたり，割ったりするときには注意が必要です。

《例 4—1》

不等式 $-\dfrac{1}{2}x + 4 > 9$ を解け。

〈解答〉

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x+4&>9 \\
-\frac{1}{2}x&>9-4 \\
-\frac{1}{2}x&>5 \\
x&<5\times(-2) \\
x&<-10
\end{aligned}
$$

左辺の $+4$ を右辺に移項

両辺を -2 倍

このとき，不等号の向きが逆になる

絶対値

717-011-017

実数 a に対して，負でない実数 $|a|$ を

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

と定義するとき，$|a|$ を「**a の絶対値**」といいます。要は，絶対値記号の中がマイナスの数であれば，マイナスをプラスに変えるということです。数直線で考えた場合，「0 からの距離」ということもできます。当然，絶対値の中の符号がわからない場合は，場合分けをする必要があります。

Ex.1　次の方程式を解け。

(1) $|x-1|=2$　　(2) $|x+4|=5x$　　(3) $|x-1|+|x-2|=x$

【26】 ※ 717−012−026

$1 < x < 2$，$-3 < y < -2$ であるとき，次の式の値の範囲を求めよ。

(1) $3x - 2$　(2) $3x + y$　(3) $3x - y$　(4) $\dfrac{1}{x}$

【27】 ※ 717−012−027

次の不等式を解け。

(1) $5x - 3 < 2x + 9$　(2) $4(2x - 2) \leqq -(x - 1)$

(3) $\dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x-1}{2}$　(4) $0.3x - 2 \geqq 0.5x + 0.4$

【28】 ※ 717−012−028

2 つの正の数 x，y を小数第 1 位で四捨五入すると，それぞれ 6，4 になるという。このとき，$3x - 2y$ の値の範囲を求めよ。

【29】 ※ 717−012−029

次の不等式を解け。

(1) $|2x - 11| < 5$　(2) $|x - 1| < -2x$　(3) $3 - 2|x| > |x - 1|$

【30】 ※ 717−012−030

次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 2(x+2) < 5x + \dfrac{x-3}{2} \\ \dfrac{x-2}{5} \geqq \dfrac{x-4}{2} \end{cases}$

(2) $\dfrac{5(x-1)}{2} \leqq 2(2x+1) < \dfrac{7(x-1)}{4}$

【31】 ※ 717−012−031

家から 1500m 離れた駅まで，はじめは分速 80m で歩き，途中から分速 140m で走って行くことにする。家を出てから 15 分以内に駅に着くようにするためには，走る道のりを何 m 以上にしなければならないか。

【32】 ※ 717-012-032

二つの円 O，O′ がある。円 O の半径を r とし，円 O′ の円周の長さは円 O の円周の長さより 20 だけ長いとする。

円 O′ の半径は $r+\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\pi}$ である。円 O′ の面積が円 O の面積の 2 倍以上であり，かつ 3 倍以下であるような r の値の範囲は，

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\pi} \leqq r \leqq \frac{\boxed{\text{カキ}}+\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\pi}$$

である。

【33】 ※ 717-012-033

2 つの不等式

$3x+5>5x-1$ ……①，$5x+2a>4-x$ ……②

がある。ただし，a を定数とする。

(1) 不等式 ① を解け。

(2) 2 つの不等式 ①，② を同時に満たす整数が存在し，かつそれが自然数のみになるとき，a の値の範囲を求めよ。

【34】 ※ 717-012-034

不等式 $\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<18$ …… ① について，次の問いに答えよ。

(1) ① を満たす整数 x の個数を求めよ。

(2) 正の数 a に対して，不等式 $\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<a$ …… ② を満たす整数 x の個数が 4 であるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

Section 5 集合

集合，要素，部分集合

717-011-018

集合という言葉は，日常生活でもよく使われていますね。数学の世界では，範囲がはっきりとしたものの集まりを**集合**と呼びます。そして，その集合を構成している1つ1つを**要素**と呼びます。たとえば，「麦わらの一味」という集合に対して，「ルフィ」は要素ということになります。

要素 a が集合 A に属していることを，$a \in A$ と表します。先ほどの例で言えば，

ルフィ $\in$ 麦わらの一味

というようになります。

また，b が集合 A に属していないとき，$b \notin A$ と表します。異なる例を用いると，

ドラえもん $\notin$ 麦わらの一味

ということになります。(本書執筆時点では，ドラえもんは麦わらの一味に所属していません)

さらに，集合の中に属している小さな集合を**部分集合**と呼びます。集合 B が集合 A の部分集合であることを，$B \subset A$ と表します。

麦わらの一味 $\subset$ ワンピースに出てくる海賊

というような使い方ですね。

集合の表し方

717-011-019

集合を表すときには $\{\ \}$ を用いて以下のように表します。

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$$

(2) 1 より大きく 3 より小さい実数全体の集合 B

$$B = \{x \mid 1 < x < 3,\ x \text{ は実数}\}$$

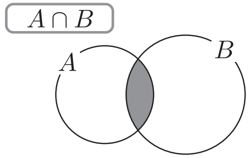
(3) 5 で割り切れる自然数全体の集合 C

$$C = \{5n \mid n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\}$$

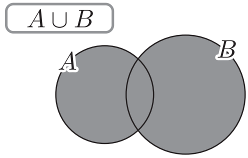
※1）$a \in A$ を $A \ni a$ と表したり，$B \subset A$ を $A \supset B$ のように表すこともあります。
※2）集合 A と集合 B の要素が同じであるとき，$A = B$ と表します。
※3）要素が1つもない集合を空集合といい，$\emptyset$ で表します。

共通部分と和集合 717-011-020

2つの集合 A, B に対して，A と B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい，$A \cap B$ と表します。共通部分は**積集合**と呼ばれることもありますが，ほとんどの教科書や参考書では共通部分と呼んでいるので，本書もそれに合わせています。

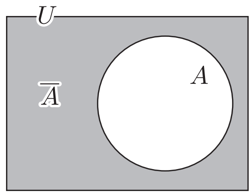


また，A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい，$A \cup B$ と表します。



全体集合と補集合 717-011-021

集合を考えるときは，あらかじめ「全体の集合」を決めておくことがあります。この全体集合を U で表します。



また，U の部分集合 A に対し，A に属さない U の要素全体の集合を，U に関する A の**補集合**といい，$\overline{A}$（エーバーと読む）で表します。「少なくとも～」という言葉が出てきたとき，この補集合の考え方を使う機会が多くあります。

ド・モルガンの法則 717-011-022

$A \cap B$, $A \cup B$ の補集合について，下記の法則が成り立ちます。

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

集合の個数（数A） 717-011-023

有限集合 P の要素の個数を $n(P)$ で表します。たとえば，12 の正の約数全体の集合 A の要素の個数は 6 個 (1, 2, 3, 4, 6, 12) であるので，$n(A) = 6$ となります。

【35】 ※ 717－012－035

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする。集合 U の部分集合 A，B を，

$$A=\{1, 2, 4, 6, 8\},\ B=\{1, 3, 6, 9\}$$

とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{A}\cap B$　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$

(5) $\overline{A\cap B}$　(6) $\overline{A\cup B}$

【36】 ※ 717－012－036

100 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1) 6 の倍数

(2) 2 または 3 の倍数

(3) 2 で割り切れるが 3 で割り切れない整数

(4) 2 と 3 の少なくとも一方で割り切れない整数

【37】 ※ 717－012－037

1 から 100 までの整数のうち，21 と互いに素であるものの個数を求めよ。

Section 6 命題と条件

このセクションでは，命題と条件という単元を扱います。いわゆる「論理学」の入門編になります。論理学というと難しく考える人も多いのですが，要は物事の色々なものを数学という記号を使って，よりシンプルに表すという考え方です。これは数学だけでなく，現代文や小論文，果ては法科大学院の適性試験や就職活動のテストなどでも問われる非常に重要なテーマです。まずは，簡単な論理テストをやってみましょう。

> 右のような 4 枚のカードがあり，文字の裏には数字が書いてあることがわかっている。「母音の裏は必ず奇数である」という仮説が正しいかどうかを確認するには，最低限どのカードをめくって確認する必要があるか。
>
> A　K　13　48

さて，答えはわかりますか？ じっくり考えてから，次の項目に移ってくださいね。

論理とは　◈ 717- 011 - 024

さて，まずは先ほどの問題の答えを。正解は，「A と 48」です！ この問題を出すと，最も多い答えは「A と 13」となるのですが，皆さんはいかがでしたか？

我々の日常生活では，日本語や英語のような自然言語を用いています。対して，数学のように，人間がある目的をもって作り上げた言語のことを人工言語と呼びます。論理学とはまさに，自然言語を記号化して人工言語に置き換えたものです。自然言語は，ちょっとした差異で解釈の違いが起こる可能性があります。人工言語に置き換えることによって，正確に解釈をすることができるようになるのです。さて，論理学についての入り口を学んでいきましょう。

命題と真偽　◈ 717- 011 - 025

「日本はよい国だ」

これを聞いたとき，皆さんはこれが正しいか正しくないか判断できますか？

「日本は治安もよいし食べ物も美味しい！ よい国だ！」「いや，日本は超高齢社会になっていてこの先の未来が不安だからよい国ではない！」「そもそもよい国の定義ってなんだ？」といった，様々な回答がありそうですね。では，次のものはどうでしょうか。

「鹿児島県は日本の中にある」

これは，皆さん全員が「正しい」と認識することができますね？

後者のように，正しいか正しくないかが明確に決まる文や式のことを**命題**といいます。ですから，前者は命題ではありません。命題が正しいとき，その命題は**真**である，といい，正しくないとき，その命題は**偽**である，といいます。

仮定と結論　717－011－026

命題は，2 つの条件 p，q を用いて，「p ならば q」という形で表されることがほとんどです。このような命題を「ならば命題」と呼ぶことがあります。例題を見てみましょう。

《例 6—1》

「x が偶数ならば，x^2 は 4 の倍数である」

このような命題があった場合，

p: x が偶数である

q: x^2 は 4 の倍数である

という 2 つの条件を「p ならば q」という形でつないでいます。これを，数学では「$p \Rightarrow q$」と表します。このとき，矢印の始点 p を**仮定**，矢印の終点 q を**結論**といいます。また，「$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$」を満たすとき，$p \Leftrightarrow q$ と表します。このとき，p と q は**同値**であるといいます。また，条件 p と条件 q が同じ条件であるときも同値といい，$p \Leftrightarrow q$ で表します。

※）一見すると「ならば命題」に見えなくても，「ならば」が隠れていて，本質的には「ならば命題」になっているものがあります。たとえば，「奇数の平方は奇数である」という命題は，「整数 n について，n が奇数ならば n^2 が奇数である」と，ならば命題になっています。

反例　717－011－027

ならば命題が偽である，とはどういう状態かを考えてみましょう。たとえば，

「x が素数であるならば，x は奇数である」

という命題は真か偽か？ これは偽です。なぜならば，$x = 2$ という，命題が真になり得ない例が存在するからです。このように，ならば命題において「仮定は満たすが，結論を満たさない例」のことを，**反例**といいます。通常，命題の真偽が問われた際，偽であることを示すためには反例を 1 つ以上挙げる必要があります。

条件の結合　※ 717–011–028

集合のときと同様，「かつ」「または」の考え方は条件でも用いることができます。また，条件を結合するときの記号は，「p かつ q」を「$p \wedge q$」と表し，「p または q」を「$p \vee q$」と表します。

たとえば，x は整数として，条件 p，q を以下のようにします。

p：x は偶数である。

q：x は 3 の倍数である。

このとき，

$p \wedge q$：x は 6 の倍数である。

$p \vee q$：x は 2 の倍数または 3 の倍数である。

というように，条件が結合されます。

条件の否定　※ 717–011–029

条件 p に対して，「p でない」も 1 つの条件となり得ます。これを，条件 p の否定といい，$\overline{p}$ で表します。当然，$\overline{\overline{p}}$ は「否定の否定」となるので，p になります。

たとえば，x を整数とするとき，条件 p が「x は奇数である」という条件ならば，$\overline{p}$ は「x は偶数である」となります。

ド・モルガンの法則　※ 717–011–030

集合のときと同様，「かつ」「または」の考え方は，ド・モルガンの法則も適用できます。

ド・モルガンの法則

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

条件と集合　※ 717–011–031

命題の真偽を考える際，数直線やベン図を用いて包含関係を使って考えると，イメージがしやすくなります。例を用いて考えてみましょう。

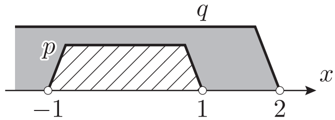
《例 6—2》

$$-1 < x < 1 \Rightarrow x < 2$$

この命題の仮定 p と結論 q を以下のように，

p: $-1 < x < 1$

q: $x < 2$

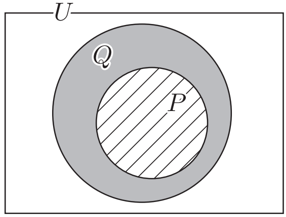


とすると，$p \Rightarrow q$ となり，右のような数直線で表すことができます。

さて，これをベン図を用いて集合で考えてみましょう。

$P = \{x \mid -1 < x < 1,\ x \text{ は実数}\}$

$Q = \{x \mid x < 2,\ x \text{ は実数}\}$



とすると，数直線の状況から，ベン図は右のようになることがわかります。すると，$P \subset Q$ の状況になっていることがわかります。

一般的に，$P \subset Q$ の状況が成り立つことと，$p \Rightarrow q$ が成り立つことは同じ意味になります。数直線やベン図を用いて，命題を視覚化することで命題は扱いやすくなります。

また，上の例のような条件 p を満たす要素全体の集合 P を，p の**真理集合**といいます。授業などで使われる（し，ちょっとかっこいい）ので呼び名を覚えておきましょう。

必要条件，十分条件，必要十分条件　717–011–032

$p \Rightarrow q$ が真であるとき，p は q であるための**十分条件**であり，q は p であるための**必要条件**である，といいます。しかし，この定義は結構わかりにくいですよね！特に，「必要」とか「十分」といった言葉に惑わされることが多いので，意味を考えずに仕組みだけをしっかり覚えてください。

以下のステップにしたがって，考えていきましょう。

Step1　$p \rightleftarrows q$ をつくり，$p \rightarrow q$ と $p \leftarrow q$ の両方の真偽を調べる。

$$p \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q$$

両方の向きの
真偽を調べる

Step2　真である方の $\Rightarrow$ の向きに「十分に必要」と唱えて，仮定の方に「十分」，結論の方に「必要」と書き込む。

$$\underset{\textbf{必要}}{p} \Leftarrow \underset{\textbf{十分}}{q}$$

$q \Rightarrow p$ が真！
q が十分！ p が必要！

なお，$p \Rightarrow q$ も $p \Leftarrow q$ もどちらも真であるとき，これを $p \Leftrightarrow q$ と表します。先に述べた「同値」の状態ですね。このとき，「p は q であるための**必要十分条件**であ

る」といいます。もちろん，同値ですから「q は p であるための必要十分条件である」といっても OK です。

Ex.1

n を自然数とする。条件 p，q を，

$$p : n = 2 \quad q : n^2 = 2n$$

とする。このとき，p は q であるための $\boxed{}$ 条件である。

$\boxed{}$ に入る言葉を埋めよ。

【38】 ※ 717－012－038

x は実数とする。このとき，次の空欄の中に適切なものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(1) $x=2$ は $x^2=2x$ であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

(2) $x>0$ は $x\neq 1$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

(3) 2 つの三角形の面積が等しいことは，2 つの三角形が合同であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ であることは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{B}=90°$ の直角三角形であるための $\boxed{\text{エ}}$ 。

【39】 ※ 717－012－039

実数 a に関する条件 p，q，r を次のように定める。

$p：a^2 \geqq 2a+8$
$q：a \leqq -2$ または $a \geqq 4$
$r：a \geqq 5$

(1) q は p であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

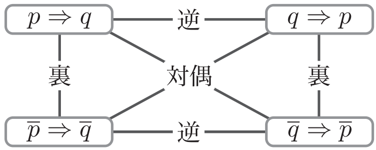
(2) 命題「p ならば $\boxed{\text{イ}}$ 」は真である。また，命題「 $\boxed{\text{ウ}}$ ならば p」は真である。下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ q かつ $\overline{r}$　　① q または $\overline{r}$
② $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$　　③ $\overline{q}$ または $\overline{r}$

Section 7 命題と証明

逆・裏・対偶　717-011-033

命題 $p \Rightarrow q$ に対して，



$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の **逆**

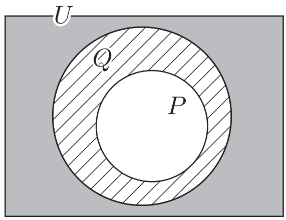
$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を $p \Rightarrow q$ の **裏**

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を $p \Rightarrow q$ の **対偶**

といいます。この関係が右にまとめてあります。

ここで，条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q としてみましょう。$p \Rightarrow q$ が真であるとき，$P \subset Q$ であることは先に紹介しましたね。

このとき，右のベン図のような状態になっています。このとき，$\overline{Q} \subset \overline{P}$ も常に成り立つことがわかりますか？ これより，



$P \subset Q$ であることは，$\overline{Q} \subset \overline{P}$ であることと同値

だということがわかります。$\overline{Q} \subset \overline{P}$ であれば $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ であるわけですから，結局，

$p \Rightarrow q$ が真であるとき，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ も真

であることがいえます。

一般的に，ある命題とその対偶命題の真偽は一致します。もし，ある命題の真偽の判定が難しい場合，その対偶をとって考えてみると扱いやすくなることがあります。

Ex.1　x，y を実数とする。対偶を考えることにより，次の命題の真偽を示せ。また，偽の場合は反例を１つ挙げよ。

$$x + y > 0 \Rightarrow x > 0 \vee y > 0$$

【40】 ※ 717– 012 – 040

右のような 4 枚のカードがあり，文字の裏には数字がかいてあることがわかっている。

A	K	13	48

「母音の裏は必ず奇数である」

という仮説が正しいかどうかを確認するには，最低限どのカードをめくって確認する必要があるか。

【41】 ※ 717– 012 – 041

x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆と対偶を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1) $x=0 \Rightarrow xy=0$　　(2) $xy>0 \Rightarrow x>0$ かつ $y>0$

【42】 ※ 717– 012 – 042

整数 a, b, c に関する次の命題 P を考える。

P：「$a^2+b^2+c^2$ が偶数になるならば，
a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である」

命題 P の真偽を判定せよ。(真であれば証明を，偽であれば反例を示せ)

【43】 ※ 717－012－043

自然数 n に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

p：n は 5 で割ると 1 余る数である

q：n は 10 で割ると 1 余る数である

r：n は奇数である

s：n は 2 より大きい素数である

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す。

(1) 下の空欄にあてはまる言葉を下の⓪ ～ ③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

「p かつ r」は q であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

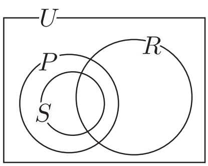
② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

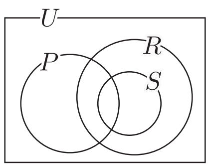
(2) 自然数全体の集合を全体集合 U とし，条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，P, R, S の関係を表す図は $\boxed{\text{エ}}$ である。

空欄にあてはまる図を下の④ ～ ⑦のうちから一つ選べ。

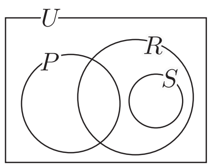
④



⑤



⑥



⑦