● ● ● はじめに ● ● ●

※ 727– 000 – 001

数学のトリセツⅡB をお手にとっていただきありがとうございます。本書は参考書と問題集を１つにまとめており，１冊で数学Ⅱ B の学習ができるようになっています。数学において重要なことは，徹底した基礎・基本，原理・原則の理解です。基礎・基本にあたる導入部分（本書では Introduction という）も詳しく解説していますので，数学が苦手な人にとってもスムーズに取り組んでいけるよう配慮してあります。また，数学に苦手意識がなくても「応用問題になると解けない！」という，いわゆる伸び悩み状態の人は問題を解くときの原理・原則を理解していないことが考えられます。そんな人にとっても本書はその助けになるでしょう。本書を通じて，確固たる基礎・基本を確立し，問題を解くときの原理・原則を理解していけば，応用問題や入試問題に取り組む際にもストレスなく進んでいけるでしょう。学校の授業のお供として，塾や予備校の教材のパートナーとして，あるいは，メインの教材として活用できるものになっています。

本書の最大の特徴は，導入から演習問題に至るまで，全てに動画解説が付いていることです。多くの受験生を指導した私自身が本書を執筆し，解説講義をしています。本書で扱う問題は，基礎的なものから入試問題まで幅広く扱っています。数学のトリセツⅠ A より応用問題の割合が多くなっていますが，わかった気にさせるのではなく，しっかりと「できる」状態まで引き上げますので，安心して取り組んでください。

また，世の中の参考書や問題集を「学校の補助教材」と「受験対策用」にざっくり分けるとすれば，本書は後者になるでしょう。しかし，学校で習っている数学も受験で扱う数学も，同じ「数学」という学問であることに変わりはありません。本書では「教科書には載っていないけど，受験生ならば押さえておくべき事柄」についても，多く取り扱っていますが，それらは決して，学校で習う数学の理解を妨げるものではありませんので，意欲的に取り組んでほしいと思います。

本書に取り組んでいただく前に，この教材ができた背景について触れたいと思います。現在，世の中には多くの数学の参考書や問題集が溢れています。そして，そのどれもが非常によく作られており，取り組む価値の高いものばかりです。私自身も，受験生時代にはいくつかの参考書や問題集に取り組み，受験生に数学を教える仕事を始めてからも，数多くの本を手に取り，自分の講義へ活用してきました。

しかしながら，そのように良書が溢れているにもかかわらず，世の中には一定数の「数学を苦手とする受験生」が存在します。当然，やる気のない受験生は，どのような本を手に入れても成果が上がることはないでしょう。しかし，「やる気もあるし，努力もしているのに，数学ができるようにならない人」が存在するというのは，少し

不思議な気もします。「やる気はあるのにできるようにならない」人のために，本書は生まれました。私はこれまでに，未就学児童から大学生まで数多くの児童・生徒・学生に算数や数学を教えてきました。そして，多くの数学嫌いを解決してきた経験があります。本書を通じて，その方法を皆さんに伝えていきます。

やる気があるのに数学ができない人は，「よし，やってみよう！」→「何から始めていいかわからないから，とりあえずみんなが使っている参考書や売れている問題集に手を出す」→「でもわからない，できるようにならない」→「やる気がなくなる」という流れを辿り，テストや入試など，必要に迫られてまた振り出しに戻ります。このループを繰り返すことで「自分は数学が苦手だ，数学が嫌いだ。」という考えに至ります。これまで，やる気のある人がなぜ伸びなかったのか，原因は以下の点にあると考えています。

① 本だけ（文字だけ）の参考書や問題集には理解できない箇所が多くある。
② 必要最小限すぎて，大切な部分の説明が足りない。
③ 表現がわかりづらい。

これらを解決することを念頭に置いて，教材の開発を行いました。特に数学ⅡＢでは数学ⅠＡに比べ，難しく感じられる部分が多くあります。そのせいか，数学ⅡＢの学習でつまずいてしまい，数学に苦手意識を感じたまま受験に突入する受験生を数多く見てきました。この本は数学の学習書として十分な機能がありますが，それでも数学をちゃんとできるようになるためには，つまり，上記の ① 〜 ③ を解決するには，映像や音声の力を借りた方が何倍も効果的です。本書の最大の特徴である動画解説を活用して，効率的に数学の学習を進めていただけたら幸いです。

映像をつけるためには，多くのコストと手間がかかります。この本は，教育の世界を変えたいという熱い意志を持った仲間たちの協力によって生まれました。私たちの描く教育の未来に賛同してくださった，企業や個人が多大なる協力をしてくれたおかげで本書は生まれました。純粋な教育に対する思いが集まって，「映像をつける」という簡単なようで難しい課題を解決することができたのです。映像に関しては撮影用のスタジオを用意し，映像制作のプロに手伝ってもらいました。広告が入る無料の動画視聴サイトを利用せず，自分達でサーバーを準備し，アプリを用意しました。既存の映像講義を元にして本を作ったのではなく，本を書いてから専用の動画を撮り下ろしました。また，私の教え子たちから貴重な意見をもらい，現在も学校や予備校で数学を教えている先生たちからも意見をもらいました。

様々な「意識熱い系」の仲間たちの協力で，この本の出版に至りました。これまでにない新しい勉強の取り組みを，ぜひ体感してください。

この本をきっかけにして，１人でも多くの「数学で悩んでいる人」が救われることを心から願っています。そして，いつか我々と一緒に，教育の世界を変える仲間として，同士に加わってくれることも，密かに願っています。

数学の勉強の仕方

※ 727– 000 – 002

さて，本書を手に取り，早速取り組もうとしている人も多いかもしれませんが，ちょっと待ってください。何事も，取り組む前の準備が大切です。そもそも「数学」ってどういう学問なのか。そして，どうやったらできるようになるのか。それらを確認してから，本腰を据えて取り組んでいくことにしましょう。ぜひ動画を視聴してみてください。

数学とはコトバ

みなさんが学習している数学というのは，日本語や英語と同じ，言語の１つです。数学は物理や化学などサイエンスの世界で使われる共通言語なのです。サイエンスの世界は，何も学校で習う「理科」だけではありません。経済学や社会学などもサイエンスです。では，なぜ数学という言語をサイエンスの世界では使っているのか。それは，唯一解釈の多様性のない言語だからです。私たちが使っている自然言語は，状況に応じて解釈の違いが生まれます。「とても速いスピードで物体が横切った」という文を読んだとき，「とても速い」というのは人によって解釈が違うでしょう。数学という人工言語は，解釈の多様性がなく，文化や状況を超えて，すべての人が平等に理解できる唯一の言語なのです。ですから，正確性が必要なサイエンスの世界では数学というコトバが使われることになるのです。

さて，皆さんは言語を学習するときは，どのように学習していますか？ 英語を例にとって考えてみるとわかりやすいと思いますが，まずは単語や熟語を覚え，文法を学習し，アウトプットを繰り返していくことでしょう。数学も同じです。定義や定理・公式をしっかり覚え，問題による解き方を学習し，アウトプットを繰り返すことで，できるようになっていくのです。

英語ができない人は，まず語彙力が足りないことが多いでしょう。数学ができない人は，定義や定理・公式をしっかり覚えていないことが原因になっています。また，英文法を理解していないと英語の理解が難しいように，数学においても問題の解き方を理解していないと，当然スムーズに解くことができません。結局は，数学を学習する姿勢は英語の学習と同じです。

皆さんは，日本語をすでに習得していますね。そうであるならば，数学という言語の理解は必ずできます。しっかりとした学習の仕方を学べば，数学というのは全員が正しく扱えるようになる素晴らしい言語なのです。

数学のトリセツの取扱説明書

※ 727‐000‐003

本書は，「Introduction」と「演習問題」に分かれています。Introduction では，その単元で扱う用語や重要事項などをまとめてあります。一読して理解があやふやなものは動画で理解を深めてください。演習問題では，その単元の重要な問題を用意してあります。すべての問題が解けるようになるまで，繰り返し取り組んでください。

また本書は，数学のトリセツＩＡの内容を理解していることを前提に作られています。もし，動画を見ても理解が難しい場合は，数学ＩＡからやり直すことを強くお勧めします。

トリセツの巻末解説について

トリセツのすべての演習問題には解説が付録してありますが，これらは最低限のことしか記していません。計算過程や記述も最小限に抑えています。ある程度数学ができるようになってくると，冗長な解説は不要なので，あえてそのようにしています。解説を一読し，わからないことがあれば解説動画をぜひ活用してください。

わからない箇所に関して，時間をかけて自分の力で理解をすることも，数学の力をつける意味ではとても大切です。本書に掲載している問題は「見た瞬間に解法が思い浮かぶ状態」になることが重要ですので，あまり時間をかけずに短期間で全範囲の学習を終えてほしいと思います。「巻末の解説があれば十分！」と自信を持って言えるようになれば，あなたはすでに数学ⅡＢの基礎は完璧になっていると断言します。

初めて数学ⅡＢを学習する人

本書を手元に置いた状態で，Introduction から動画の視聴を始めてください。専用のノートも準備をして，学校の授業のように板書をノートに取りながら講義を視聴してください。

各章の Introduction で新しく学習する単元の導入を行います。その後，演習問題に取り組んでいきましょう。解答・解説を確認して，解説の理解が曖昧な場合は，解説動画を視聴してください。

既習単元の演習をしたい人

演習問題から取り組んでみましょう。解けない問題は各章の Introduction を確認し，解答・解説を読んでみましょう。それでも理解があやふやな場合は解説動画を視聴しましょう。また，解説動画の理解が難しい場合は，各章の Introduction の動画も視聴してみてください。きっと演習問題の解説が理解できるようになるでしょう。

目次

CONTENTS

第5章 指数関数・対数関数

第6章 微分法・積分法

第7章 数列

第8章 平面上のベクトル

第9章 空間上のベクトル

補足：授業内で使う記号と意味

記号	意味	記号	意味
$\therefore$	ゆえに	$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\because$	なぜならば	$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	$\blacksquare$	証明終了

1 式と証明

この章では「証明」の基本的な技術について確認をしていきます。数学の問題では「証明せよ」という問題が多く出題されますね。数学が苦手な人だと，「『証明せよ』ってことは，そうなんでしょ！ なんでイチイチ確かめなきゃいけないんだよ！」と思うかもしれませんね。

数学に限った話ではないのですが，世の中の様々な命題に対して「本当にそうなの？」という，疑いの姿勢をもつことはとても大切です。現代は様々な情報で溢れており，真偽の定かではない情報もたくさんあります。その時に，自分自身の頭で考え，正しいのかそうでないのかを判断する（すなわち証明する）ことは，皆さんの意思決定をより正確なものにしてくれるでしょう。数学で学ぶ「何でも証明してみる姿勢」は，単に数学の問題としてだけではなく，今後の人生において確実に皆さんを助けてくれるでしょう。

Section 1 二項定理

パスカルの三角形

727-011-001

$(a+b)^2$ や $(a+b)^3$ の展開公式は，数学 I ですでに学習しました。それでは，$(a+b)^n$ を展開したらどのようになるのか考えてみましょう。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となりますが，その係数を取り出してみます。

$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

$(a+b)^2$ の係数は，左から順に 1, 2, 1，$(a+b)^3$ の係数は，左から順に 1, 3, 3, 1 となります。同様にして，$(a+b)^n$ の係数をかき出していき，順に並べたものをまとめたものが上の図のようになります。このように，係数をかき出していったものを**パスカルの三角形**といいます。各段の両端は 1 で，その他はすぐ左上と右上の数の和になっています。

二項定理

727-011-002

パスカルの三角形を用いれば，次々に $(a+b)^n$ の係数を求めることができます。たとえば，$(x+2y)^5$ の x^2y^3 の係数を求めたい場合，$(a+b)^5$ の展開式

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

の $10a^2b^3$ に $a = x, b = 2y$ を代入することで考えることができます。$10(x)^2(2y)^3 = 80x^2y^3$ ですから，x^2y^3 の係数は 80 であることがわかります。

しかし，$(a+b)^{10}$ のように，n が大きな値のとき，パスカルの三角形を全部かくのは大変です。また，$(a+b)^n$ のように指数が具体的な数でなく，文字で与えられたときに $(a+b)^n$ の展開を考えることができなくなります。n が自然数のとき，$(a+b)^n$ の展開がどのようになるか考えてみましょう。

$(a+b)^5$ を展開したとき，a^3b^2 の係数を調べてみます。まず，$(a+b)^5$ は次のよ

うになります。

$$\begin{array}{c}\quad\ \text{①}\qquad\quad \text{②}\qquad\quad \text{③}\qquad\quad \text{④}\qquad\quad \text{⑤}\\ (a+b)^5=(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b)(a+\boxed{b})(\boxed{a}+b)\end{array}$$

上のように，$(a+b)^5$ は $(a+b)$ という式を 5 回かけ合わせたものです。$(a+b)^5$ の展開式の各項は ① から ⑤ の ( ) 内にある文字（a と b）を，それぞれ 1 個ずつ選んでいくことで，1 つの項が出来上がります。

a^5 の項は ① から ⑤ までの ( ) 内から「すべて a を選んでかけ合わせて作られる項」です。a^3b^2 の項は ① から ⑤ までの ( ) 内から「a を 3 個，b を 2 個選んでかけ合わせて作られる項」になります。上の例の場合，①，③，⑤ の ( ) 内から a を選び，②，④ の ( ) 内から b を選ぶことで a^3b^2 という項が作られています。

a^3b^2 の係数とは，結局のところ「a^3b^2 という項は何個できるのか」ということなので，5 つの ( ) の中から「a を 3 個，b を 2 個選ぶ方法は何通りあるか」を考えればいいことになります。つまり，

「5 つの ( ) のうち，どの ( ) から b を選ぶのか」

を考えればよいので，${}_5\mathrm{C}_2$(通り）の選び方ができるのです。もちろん，5 つの ( ) のうち，どの ( ) から a を選ぶのかを考え，${}_5\mathrm{C}_3$ 通りとしても OK です。

したがって，a^3b^2 は全部で ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 個できることになりますから，a^3b^2 の係数は 10 ということになります。このように，「どの ( ) から，いくつの b（または a ）を選ぶのか」を考えることで，展開した各項の係数を考えることができます。

$(a+b)^n$ を展開したとき，各項の次数は n になるので，各項は $a^{n-k}b^k$ $(0\leqq k\leqq n)$ と表すことができます。$a^{n-k}b^k$ は「$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ の n 個の ( ) 内から b を k 個選んでかけ合わせた項」ですから，その選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りあります。したがって，$a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_k$ となります。

以上より，$(a+b)^n$ の展開式は次のようになります。この展開を**二項定理**（または**二項展開**）といいます。また，$a^{n-k}b^k$ の係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を**二項係数**といいます。

二項定理

$$\begin{aligned}(a+b)^n={}&{}_n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\\&+{}_n\mathrm{C}_ka^{n-k}b^k+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}a^1b^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_na^0b^n\end{aligned}$$

二項定理は，非常に重要な定理ではありますが，丸暗記をするのは避けたほうがよいでしょう。二項定理の仕組みをしっかりと理解し，いつでも導出できるようにしておくことが大切です。

また，数学Bの「数列」の単元を学習すると，二項定理を次のように表すことができます。

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$$

Ex.1　次の式を展開したとき，[ ] 内の項の係数は何になるか求めよ。

(1) $(a+b)^5$　$[a^4b]$　(2) $(a-b)^4$　$[a^2b^2]$　(3) $(x-2y)^7$　$[x^4y^3]$

多項定理

❖ 727-011-003

二項定理は，$(a+b)^n$ の ( ) の中が，$a+b$ のような「項数が 2 の式」を展開したことから名前がついています。では，$(a+b+c)^n$ のように，( ) の中の項数が 3 になったとき，どのような展開式になるのでしょうか。また，一般的な多項式の n 乗の展開式を考えることはできないのでしょうか。

$(a+b+c)^n$ を例にとって考えてみましょう。$(a+b+c)^n$ を展開したときの各項の次数は n になりますから，展開したときの各項は，$a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$ と表すことができます。$a^pb^qc^r$ の係数は，n 個の ( ) から，a を p 個，b を q 個，c を r 個選んだときの総数です。これは，a を p 個，b を q 個，c を r 個を一列に並べたときの並べ方の総数と同じですから，

$$a^pb^qc^r \text{ の係数} = \frac{n!}{p!q!r!}$$

と表すことができます。

このように，$(a+b+c)^n$ の展開であったとしても，二項定理の考え方を応用することで，各項の係数を考えることはできるのです。

Ex.2　$(a+b+c)^{10}$ の展開式における，$a^5b^2c^3$ の係数を求めよ。

【1】 ❖ 727– 012 – 001

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x+2)^5$　$[x^2]$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^8$　$[x^4]$

(3) $(2x+3y)^7$　$[x^3y^4]$

(4) $(x^2-2y)^6$　$[x^8y^2]$

【2】 ❖ 727– 012 – 002

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+b+c)^6$　$[a^2b^3c]$

(2) $(1+2a+3b)^7$　$[a^2b^3]$

【3】 ❖ 727– 012 – 003

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $\left(2x-\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$　$[x^7]$，$[x^8]$

(2) $\left(1+2a^2+\dfrac{3}{a}\right)^7$　$[a]$

【4】 ❖ 727– 012 – 004

21^{21} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

【5】 ❖ 727– 012 – 005

(1) $k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(n \geqq 2,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 二項定理を利用して，次の等式が成り立つことを示せ。

(ア) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

(イ) ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 0$

(ウ) $2^n{}_n\mathrm{C}_0 - 2^{n-1}{}_n\mathrm{C}_1 + 2^{n-2}{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 1$

(エ) ${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n\cdot 2^{n-1}$

Section

Introduction

727-010-002

2 整式の除法

整式の除法

727-011-004

これまで，整式については，足し算，引き算，かけ算の 3 つの演算を確認してきました。このセクションでは，整式の割り算（除法）について確認しましょう。

$$(x-1)(x^2+2x+5)=x^3+x^2+3x-5 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となることは，左辺を展開することで確認することができます。$A=x^3+x^2+3x-5$，$B=x-1$，$Q=x^2+2x+5$ とすると，① の式は，

$$B\times Q=A \quad \cdots\cdots \text{②}$$

と表すことができます。② を，ただの文字式の計算と考えれば，$B\neq 0$ のとき，$Q=\dfrac{A}{B}$ となります。すなわち，$A\div B=Q$ であると考えることができます。この式から，

$$(x^3+x^2+3x-5)\div(x-1)=x^2+2x+5$$

となることがわかります。このように考えれば，整式どうしの割り算を考えることができそうですね。

では，次のような例を考えてみましょう。

$$x^3-x^2-x-2=(x^2+2x-1)(x-3)+6x-5 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

③ の式から，$A=x^3-x^2-x-2$，$B=x^2+2x-1$，$Q=x-3$，$R=6x-5$ とすると，$A=BQ+R$ という式になっていることがわかります。これは，

$$A=BQ+R \iff A\div B=Q\cdots R$$

と考えることができるので，A を B で割ったとき，商は Q，余りは R であるといえます。すなわち，x^3-x^2-x-2 を x^2+2x-1 で割ったとき，商は $x-3$，余りは $6x-5$ となります。

このように，整式も通常の実数と同じように，割り算を考えることができるのです。実際の計算は，次のように行います。

整式の割り算

Step.1　除法を行う整式を降べきの順に並べる。

Step.2　次数をそろえて計算をする。ある次数の項がないときは，その項の場所を空ける。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & -3 & & \\
\hline
x^2+2x-1 & x^3 & -x^2 & -x & -2 \\
 & x^3 & +2x^2 & -x & \\
\hline
 & & -3x^2 & & -2 \\
 & & -3x^2 & -6x & +3 \\
\hline
 & & & 6x & -5
\end{array}
$$

Step.3　余りの整式の次数が，割る整式の次数より低くなるまで計算する。

A と B が同じ 1 つの文字についての整式で，$B \neq 0$ とするとき，

$\boldsymbol{A = BQ + R}$　（$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{0}$ か，$\boldsymbol{B}$ より次数の低い整式）

を満たす整式 Q と R がただ 1 通りに定まります。$R = 0$ のとき，整式は割り切れることを表します。

Ex.1　次の多項式 A，B について，A を B で割った商 Q と余り R を求めよ。

$A = 2x^3 - 3 + 5x$，$B = 3 - 2x + 2x^2$

【6】 ❖ 727-012-006

次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求め，$A=BQ+R$ の形に表せ。

(1) $A=x^3-3x-8,\ B=x-3$

(2) $A=2x^3-5x^2+6,\ B=2x-3+x^2$

【7】 ❖ 727-012-007

次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。

(1) A を x^2+x-2 で割ると，商が $3x-1$，余りが $2x-5$ である。

(2) $3x^3-5x^2-8x+2$ を B で割ると，商が $3x+4$，余りが $x-2$ である。

【8】 ❖ 727-012-008

次の分数式を約分して，既約分数式で表せ。

(1) $\dfrac{9ab^2}{27a^2b}$　(2) $\dfrac{4a^3+8ab^2}{6a^2}$　(3) $\dfrac{2x^3-2}{x^2+x+1}$

【9】 ❖ 727-012-009

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a^2b^3}{3c}\times\dfrac{6c^2}{a^2b}$　(2) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\times\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

(3) $\dfrac{a^2-2a-3}{2a-6}\div\dfrac{2a^2-a-1}{2a+1}$　(4) $\dfrac{x+1}{2x-1}\div\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+7x-4}$

【10】 ❖ 727-012-010

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2+3}{x+3}+\dfrac{4x}{x+3}$　(2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-x-2}$　(4) $\dfrac{x+1}{3x^2-2x-1}+\dfrac{2x+1}{3x^2+4x+1}$

【11】 ❖ 727-012-011

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

(2) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$

【12】 ※ 727－012－012

分数式 $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$ を計算せよ。

【13】 ※ 727－012－013

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

(2) $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}$

Section

3 恒等式

Introduction

727- 010 - 003

恒等式

727- 011 - 005

含まれている文字にどのような値を代入しても，その等式の両辺の値が存在する限り常に成り立つ等式を，その文字についての**恒等式**といいます。

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ や，$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ などは，すべて恒等式になります。

式の変形によって導かれる等式は，基本的には恒等式になります。展開と因数分解で成り立つ等式なども恒等式です。

P，Q を x についての整式とするとき，次の性質が成り立ちます。

> $P=0$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ P の各項の係数はすべて 0
>
> $P=Q$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ P と Q の次数は等しく，両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい。

Ex.1　以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $3x^2-2x-1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ が，x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(2)　等式 $(k+1)x-(3k+2)y+2k+7=0$ がすべての k に対して成り立つとき，定数 x，y の値を求めよ。

【14】 ❖ 727–012 – 014

次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

$$x^2 - x = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$$

【15】 ❖ 727–012 – 015

等式 $\dfrac{2x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

【16】 ❖ 727–012 – 016

$x^2 + axy - 10y^2 - 7x + 7y + b = (x+2y+c)(x-5y+d)$ が $x,\ y$ についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

Section 4 等式と不等式の証明

等式の証明　727-011-006

等式を証明するときの基本方針は，次のようになります。

> $A=B$ を証明する。
> ①　A か B の一方を変形して，他方を導く。
> ②　$A=C$，$B=C$ を示す。
> ③　$A-B=0$ を示す。

不等式の証明　727-011-007

不等式を証明するときの基本方針は，次のようになります。

> $A>B$ を証明する。
> ①　$A-B>0$ を示す。
> ②　$A>C$，$C>B$ を示す。

比例式と連比　727-011-008

$a:b=c:d$ や $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のように，比や比の値が等しいことを表す等式を**比例式**といいます。

また，$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$ を $a:b:c=x:y:z$ と表します。この $a:b:c$ を**連比**といいます。

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと，$a=kx$，$b=ky$，$c=kz$ とおくことができます。

Ex.1　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}\neq 0$ のとき，$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

相加平均・相乗平均　※ 727－011－009

2 つの実数 a，b について，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**といいます。この 2 つの平均には，次のような関係があります。

相加平均・相乗平均の関係

$a>0$，$b>0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad （等号は，a=b のとき成り立つ。）$$

〈証明〉

$a>0$，$b>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= \frac{1}{2}\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

また，等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，すなわち $a=b$ のときである。 ■

相加平均・相乗平均の関係は，不等式の証明だけでなく，最小値（や最大値）を求めるときにも利用することができます。演習問題で確認しましょう。

コーシー・シュワルツ不等式　※ 727－011－010

実数 a，b，c，x，y，z において，次の不等式が常に成り立ちます。

コーシー・シュワルツ不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

等号は，$a:b:c=x:y:z$ のとき成り立つ。

なお，$c=0$，$z=0$ のとき，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ となります。

〈証明〉

$$\begin{aligned}&（左辺）－（右辺）\\ &=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\\ &=a^2(x^2+y^2+z^2)+b^2(x^2+y^2+z^2)+c^2(x^2+y^2+z^2)\\ &\qquad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)\end{aligned}$$

$$= (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) + (c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2)$$
$$= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geqq 0$$

等号成立は,

$$ay = bx \ \land \ bz = cy \ \land \ cx = az$$
$$\Leftrightarrow \ a : b = x : y \ \land \ b : c = y : z \ \land \ c : a = z : x$$

つまり, $a : b : c = x : y : z$ のときである。 ∎

コーシー・シュワルツ不等式も, 不等式の証明だけでなく, 最小値（や最大値）を求めるときにも利用することができます。こちらも演習問題で確認をしましょう。

【17】 ※ 727-012-017

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$ を証明せよ。

【18】 ※ 727-012-018

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a(a+c)}{b(b+d)}=\dfrac{c^2}{d^2}\quad(b+d\neq 0)$　　(2) $\dfrac{b^2+d^2}{a^2+c^2}=\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}$

【19】 ※ 727-012-019

$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{7}$ のとき，$x:y:z$ を求めよ。また，$\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$ の値を求めよ。ただし，$xyz\neq 0$ とする。

【20】 ※ 727-012-020

$a>b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $c>0\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$　　(2) $c<0\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a-c}{b-c}$

【21】 ※ 727-012-021

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2+2xy+2y^2\geqq 0$　　(2) $x^2+y^2\geqq 2(x-y-1)$

(3) $(a+b+c)^2\geqq 4(ab+bc)$

【22】 ※ 727-012-022

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $|a|+|b|\geqq|a-b|$　　(2) $|a|-|b|\leqq|a-b|$

【23】 ※ 727-012-023

(1) $x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

【24】 ❖ 727– 012 – 024

実数 x, y, z の間に，$x+2y+3z=7$ という関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ は，

$x=\dfrac{y}{\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{z}{\boxed{\text{イ}}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。