演習問題
解答・解説

第1章
式と証明

Section 1　二項定理

【1】 ※ 727-012-001

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x+2)^5$　$[x^2]$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^8$　$[x^4]$

(3) $(2x+3y)^7$　$[x^3y^4]$

(4) $(x^2-2y)^6$　$[x^8y^2]$

(1) 一般項は，${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}2^r$

$5-r=2$ とすると，$r=3$

よって，x^2 の係数は，${}_5\mathrm{C}_3 3^2 2^3=\mathbf{720}$

(2) 一般項は，${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r$

$8-r=4$ とすると，$r=4$

よって，x^4 の係数は，${}_8\mathrm{C}_4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{70}{81}}$

(3) 一般項は，${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}(3y)^r$

$r=4$ の場合で，係数は，${}_7\mathrm{C}_4 2^3 3^4=\mathbf{22680}$

(4) 一般項は，

$${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}(-2y)^r={}_6\mathrm{C}_r(-2)^r x^{12-2r}y^r$$

$r=2$ の場合で，係数は，${}_6\mathrm{C}_2(-2)^2=\mathbf{60}$

【2】 ※ 727-012-002

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+b+c)^6$　$[a^2b^3c]$

(2) $(1+2a+3b)^7$　$[a^2b^3]$

(1) 一般項は，$\dfrac{6!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$

$p=2$，$q=3$，$r=1$ のときで，a^2b^3c の項の係数は，$\dfrac{6!}{2!3!1!}=\mathbf{60}$

(2) 一般項は，$\dfrac{7!}{p!q!r!}1^p(2a)^q(3b)^r$

$q=2$，$r=3$，$p=7-(2+3)=2$ のときで，a^2b^3 の項の係数は，

$$\frac{7!}{2!2!3!}\cdot 2^2\cdot 3^3=\mathbf{22680}$$

【3】 ※ 727-012-003

次の式の展開式における，[ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $\left(2x-\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$　$[x^7]$，$[x^8]$

(2) $\left(1+2a^2+\dfrac{3}{a}\right)^7$　$[a]$

(1) 一般項は，

$$\begin{aligned}&{}_{12}\mathrm{C}_r(2x)^{12-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r\\&={}_{12}\mathrm{C}_r 2^{12-r}(-1)^r x^{12-4r}\end{aligned}$$

ここで，$12-4r=7$ をみたす整数 r は存在しない。したがって，**x^7 の項は存在しない**。

$12-4r=8$ とすると，$r=1$

よって，x^8 の係数は，

$${}_{12}\mathrm{C}_1 2^{11}(-1)^1=\mathbf{-24576}$$

(2) 一般項は，

$$\frac{7!}{p!q!r!}1^p(2a^2)^q\left(\frac{3}{a}\right)^r=\frac{7!2^q3^r}{p!q!r!}a^{2q-r}$$

a の係数は，0 以上の整数 $p,\ q,\ r$ が，

$$p+q+r=7,\quad 2q-r=1$$

を満たす場合で，

$$(p,\ q,\ r)=(5,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 3)$$

よって，求める係数は，

$$\frac{7!2^1 3^1}{5!1!1!}+\frac{7!2^2 3^3}{2!2!3!}=\mathbf{22932}$$

【4】 ※ 727–012–004

21^{21} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

$$\begin{aligned}
21^{21}&=(20+1)^{21}\\
&={}_{21}C_0\cdot 20^{21}+{}_{21}C_1\cdot 20^{20}\cdot 1+{}_{21}C_2\cdot 20^{19}\cdot 1^2\\
&\qquad\qquad+\cdots+{}_{21}C_{19}\cdot 20^2\cdot 1^{19}+{}_{21}C_{20}\cdot 20\cdot 1^{20}+{}_{21}C_{21}\cdot 1^{21}\\
&=20^2({}_{21}C_0\cdot 20^{19}+{}_{21}C_1\cdot 20^{18}+{}_{21}C_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}C_{19})+21\cdot 20+1\\
&=20^2({}_{21}C_0\cdot 20^{19}+{}_{21}C_1\cdot 20^{18}+{}_{21}C_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}C_{19}+1)+21
\end{aligned}$$

${}_{21}C_0\cdot 20^{19}+{}_{21}C_1\cdot 20^{18}+{}_{21}C_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}C_{19}+1$ は整数であるから，求める余りは，**21**

【5】 ※ 727–012–005

(1) $k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ $(n\geqq 2,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 二項定理を利用して，次の等式が成り立つことを示せ。

(ア) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(イ) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(ウ) $2^n{}_nC_0-2^{n-1}{}_nC_1+2^{n-2}{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=1$

(エ) ${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$

(1) $k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$n{}_{n-1}C_{k-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

よって，$k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ が成り立つ。 ■

(2) 二項定理より，

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots+{}_nC_nx^n \quad\cdots\cdots ①$$

(ア) 等式① で，$x=1$ とおくと，

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot 1+{}_nC_2\cdot 1^2+\cdots+{}_nC_r\cdot 1^r+\cdots+{}_nC_n\cdot 1^n$$

よって，${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$ ■

(イ) 等式① で，$x=-1$ とおくと，

$$(1-1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot(-1)+{}_nC_2\cdot(-1)^2+\cdots+{}_nC_r\cdot(-1)^r+\cdots+{}_nC_n\cdot(-1)^n$$

よって，${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$ ■

(ウ) 二項定理

$$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_{n-1}a^1b^{n-1}+{}_nC_na^0b^n$$

の式において，$a=2$，$b=-1$ とすると，

$$(2-1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 2^n(-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}(-1)^1 + {}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2}(-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 2^1(-1)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n 2^0(-1)^n$$

よって，$2^n{}_n\mathrm{C}_0 - 2^{n-1}{}_n\mathrm{C}_1 + 2^{n-2}{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 1$ ∎

(エ) (1) により，

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n &= n{}_{n-1}\mathrm{C}_0 + n{}_{n-1}\mathrm{C}_1 + n{}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + n{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} \\ &= n({}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})\end{aligned}$$

ここで，上式の ( ) の中の式は，(ア) において，n を $n-1$ に置き換えた式なので，2^{n-1} に等しいことがいえる。

よって，${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n\cdot 2^{n-1}$ ∎

Section 2　整式の除法

【6】 ❖ 727–012–006

次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求め，$A=BQ+R$ の形に表せ。

(1) $A=x^3-3x-8$，$B=x-3$

(2) $A=2x^3-5x^2+6$，$B=2x-3+x^2$

(1)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+6 \\ \hline
x-3 & x^3 \qquad\quad -3x\ -8 \\
 & x^3-3x^2 \\ \hline
 & \qquad 3x^2-3x \\
 & \qquad 3x^2-9x \\ \hline
 & \qquad\qquad 6x\ -8 \\
 & \qquad\qquad 6x-18 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 10
\end{array}$$

よって，商は $\boldsymbol{x^2+3x+6}$，余りは $\mathbf{10}$ であり，

$$\boldsymbol{x^3-3x-8 = (x-3)(x^2+3x+6)+10}$$

(2)

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-9 \\ \hline
x^2+2x-3 & 2x^3-5x^2 \qquad\quad +6 \\
 & 2x^3+4x^2\ -6x \\ \hline
 & \quad -9x^2\ +6x\ +6 \\
 & \quad -9x^2-18x+27 \\ \hline
 & \qquad\qquad 24x-21
\end{array}$$

よって，商は $\boldsymbol{2x-9}$，余りは $\boldsymbol{24x-21}$ であり，

$$\boldsymbol{2x^3-5x^2+6 = (2x-3+x^2)(2x-9)+24x-21}$$

【7】 ❖ 727–012–007

次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。

(1) A を x^2+x-2 で割ると，商が $3x-1$，余りが $2x-5$ である。

(2) $3x^3-5x^2-8x+2$ を B で割ると，商が $3x+4$，余りが $x-2$ である。

(1)　$A=(x^2+x-2)(3x-1)+2x-5$

$=3x^3+2x^2-7x+2+2x-5$

$=\mathbf{3x^3+2x^2-5x-3}$

(2)　条件より，

$3x^3-5x^2-8x+2$

$=B(3x+4)+x-2$

が成立する。

よって，

$B(3x+4)=3x^3-5x^2-9x+4$

$B=(3x^3-5x^2-9x+4)$

$\div(3x+4)$

ゆえに，$B=\mathbf{x^2-3x+1}$

【8】　※ 727－012－008

次の分数式を約分して，既約分数式で表せ。

(1) $\dfrac{9ab^2}{27a^2b}$　(2) $\dfrac{4a^3+8ab^2}{6a^2}$　(3) $\dfrac{2x^3-2}{x^2+x+1}$

(1) $\mathbf{\dfrac{b}{3a}}$　(2) $\mathbf{\dfrac{2a^2+4b^2}{3a}}$　(3) $\mathbf{2x-2}$

【9】　※ 727－012－009

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a^2b^3}{3c}\times\dfrac{6c^2}{a^2b}$　(2) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\times\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

(3) $\dfrac{a^2-2a-3}{2a-6}\div\dfrac{2a^2-a-1}{2a+1}$　(4) $\dfrac{x+1}{2x-1}\div\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+7x-4}$

(1) $\mathbf{2b^2c}$　(2) $\mathbf{\dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)}}$　(3) $\mathbf{\dfrac{a+1}{2(a-1)}}$

(4) $\mathbf{\dfrac{x+1}{x-1}}$

【10】　※ 727－012－010

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2+3}{x+3}+\dfrac{4x}{x+3}$　(2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-x-2}$　(4) $\dfrac{x+1}{3x^2-2x-1}+\dfrac{2x+1}{3x^2+4x+1}$

(1) $\mathbf{x+1}$　(2) $\mathbf{\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}}$

(3)　(与式) $=\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x+1-x}{x(x-2)(x+1)}$

$=\mathbf{\dfrac{1}{x(x-2)(x+1)}}$

(4)　(与式)

$=\dfrac{x+1}{(3x+1)(x-1)}+\dfrac{2x+1}{(3x+1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)(x-1)}{(3x+1)(x-1)(x+1)}$

$=\mathbf{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$

【11】 ※ 727－012－011

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

(2) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$

(1) (与式)

$$=\frac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{2}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{2(x+3)+x}{x(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{3(x+2)}{x(x+2)(x+3)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{x(x+3)}}$$

(2) (与式)

$$=\frac{2}{(1-x)(1+x)}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$$
$$=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}+\frac{4}{1+x^4}$$
$$=\frac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{8}{1-x^8}}$$

【12】 ※ 727－012－012

分数式 $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$ を計算せよ。

$$(\text{与式})=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)-\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$
$$=\frac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$$

【13】 ※ 727－012－013

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

(2) $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}$

(1) $$(\text{与式})=\frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)-2}$$
$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{x+1}{x-1}}$$

(2) $$(\text{与式})=\frac{a+b+(a-b)}{a+b-(a-b)}$$
$$=\frac{2a}{2b}=\boldsymbol{\frac{a}{b}}$$

Section 3　恒等式

【14】 ❖ 727–012–014

次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

$x^2-x=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

与式の右辺を整理すると，

$x^2-x=ax^2+(-4a+b)x+4a-2b+c$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから，

$a=1,\ -4a+b=-1,\ 4a-2b+c=0$

これらを解いて，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=2}$

〈別解〉

恒等式ならば，$x=0,\ 1,\ 2$ を代入しても成り立つ。

これらを代入すると，

$0=4a-2b+c,\ 0=a-b+c,\ 2=c$

これを解いて，$a=1$，$b=3$，$c=2$

逆にこのとき，

$(\text{右辺})=(x-2)^2+3(x-2)+2$

$=x^2-x=(\text{左辺})$

となるから，もとの式は恒等式である。

したがって，$a=1$，$b=3$，$c=2$

【15】 ❖ 727–012–015

等式 $\dfrac{2x+1}{x^2(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x-1}$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

両辺に $x^2(x-1)$ をかけると，

$2x+1=ax(x-1)+b(x-1)+cx^2$

右辺を整理すると，

$2x+1=(a+c)x^2+(-a+b)x-b$

両辺の係数を比較して，

$0=a+c,\ 2=-a+b,\ 1=-b$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=3}$

【16】 ❖ 727–012–016

$x^2+axy-10y^2-7x+7y+b=(x+2y+c)(x-5y+d)$ が $x,\ y$ についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

与式を整理して，

$x^2+axy-10y^2-7x+7y+b=x^2-3xy-10y^2+(c+d)x+(-5c+2d)y+cd$

これが $x,\ y$ についての恒等式だから，

$a=-3,\ c+d=-7,\ -5c+2d=7,\ b=cd$

よって，$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=12}$，$\boldsymbol{c=-3}$，$\boldsymbol{d=-4}$

Section 4　等式と不等式の証明

【17】 ※ 727－012－017

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$ を証明せよ。

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(\text{左辺})\end{aligned}$$

よって，与式は成り立つ。 ■

【18】 ※ 727－012－018

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a(a+c)}{b(b+d)}=\dfrac{c^2}{d^2}\quad(b+d\neq0)$　　(2) $\dfrac{b^2+d^2}{a^2+c^2}=\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

(1) $(\text{左辺})=\dfrac{a(a+c)}{b(b+d)}=\dfrac{bk(bk+dk)}{b(b+d)}=k^2$

$(\text{右辺})=\dfrac{c^2}{d^2}=\dfrac{d^2k^2}{d^2}=k^2$

よって，(左辺)＝(右辺) ■

(2) $(\text{左辺})=\dfrac{b^2+d^2}{a^2+c^2}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2k^2+d^2k^2}=\dfrac{1}{k^2}$

$(\text{右辺})=\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}=\dfrac{b^2-d^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\dfrac{1}{k^2}$

よって，(左辺)＝(右辺) ■

【19】 ※ 727－012－019

$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{7}$ のとき，$x:y:z$ を求めよ。また，$\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$ の値を求めよ。ただし，$xyz\neq0$ とする。

$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{7}=k$ とおくと，

$x+y=5k$，$y+z=8k$，$z+x=7k$

これを解くと，

$x=2k$，$y=3k$，$z=5k$

よって，$x:y:z=\mathbf{2:3:5}$

また，

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{(2k)^3+(3k)^3+(5k)^3}{2k\cdot3k\cdot5k}=\frac{160k^3}{2\cdot3\cdot5\cdot k^3}=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

【20】 ※ 727－012－020

$a>b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $c>0\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$　　(2) $c<0\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a-c}{b-c}$

(1) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}$

$=\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}$

$a>b>0$ より，$a-b>0$

$b>0$，$c>0$ より，$b+c>0$

したがって，$\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$ であることがいえるので，$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$ ■

(2) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{a(b-c)-b(a-c)}{b(b-c)}$

$=\dfrac{c(b-a)}{b(b-c)}$

$a>b>0$ より，$b-a<0$

$b>0$，$c<0$ より，$b-c>0$

したがって，$\dfrac{c(b-a)}{b(b-c)}>0$ であることがいえるので，$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a-c}{b-c}$ ■

【21】 ※ 727–012–021

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2+2xy+2y^2\geqq 0$　　(2) $x^2+y^2\geqq 2(x-y-1)$

(3) $(a+b+c)^2\geqq 4(ab+bc)$

(1) $x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2\geqq 0$ ■

等号は，$\boldsymbol{x=y=0}$ のとき成り立つ。

(2) $x^2+y^2-2(x-y-1)$

$=(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)$

$=(x-1)^2+(y+1)^2\geqq 0$

よって，$x^2+y^2\geqq 2(x-y-1)$ ■

等号は，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=-1}$ のとき成り立つ。

(3) $(a+b+c)^2-4(ab+bc)$

$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$=a^2-2(b-c)a+(b-c)^2$

$=(a-b+c)^2\geqq 0$

よって，$(a+b+c)^2\geqq 4(ab+bc)$ ■

等号は，$\boldsymbol{a-b+c=0}$ のとき成り立つ。

【22】 ※ 727–012–022

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $|a|+|b|\geqq|a-b|$　　(2) $|a|-|b|\leqq|a-b|$

(1) $(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2$

$=(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=2(|ab|+ab)$

$|ab|\geqq -ab$ だから，$2(|ab|+ab)\geqq 0$

よって，$(|a|+|b|)^2\geqq|a-b|^2$

$|a|+|b|\geqq 0$，$|a-b|\geqq 0$ だから，

$|a|+|b|\geqq|a-b|$ ■

等号は，$|ab|=-ab$ すなわち，$\boldsymbol{ab\leqq 0}$ のとき成り立つ。

(2) $|a|$ と $|b|$ の大小で場合分けをする。

① $|a|<|b|$ のとき

(左辺) <0，(右辺) >0 だから，明らかに成り立つ。

② $|a|\geqq|b|$ のとき

$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2$

$=|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=-2ab+2|ab|$

$=2(|ab|-ab)$

$|ab|\geqq ab$ だから，$2(|ab|-ab)\geqq 0$

よって，$|a-b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a-b|\geqq 0$，$|a|-|b|\geqq 0$ だから，

$|a-b|\geqq|a|-|b|$

①，② より，

$|a|-|b|\leqq|a-b|$ ■

等号は，$|ab|=ab$ すなわち，$\boldsymbol{ab\geqq 0}$ のとき成り立つ。

【23】 ※ 727－012－023

(1) $x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$

$=2x^2+\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{1}{2x^2}$

$=2x^2+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{5}{2}$ ……①

$2x^2>0$，$\dfrac{1}{2x^2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により，

$2x^2+\dfrac{1}{2x^2}\geqq 2\sqrt{2x^2\cdot\dfrac{1}{2x^2}}=2$ ……②

等号成立は，$2x^2=\dfrac{1}{2x^2}$ かつ $x>0$，すなわち $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

①，② より，最小値は，

$2+\dfrac{5}{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ であるから，$ab>0$

よって，相加平均・相乗平均の関係により，

$ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}+5=9$

等号は，$ab=\dfrac{4}{ab}$ すなわち $ab=2$ のとき成り立つ。

よって，最小値は $\boldsymbol{9}$

【24】 ※ 727－012－024

実数 x, y, z の間に，$x+2y+3z=7$ という関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ は，$x=\dfrac{y}{\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{z}{\boxed{\text{イ}}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。

コーシー・シュワルツの不等式により，

$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+2y+3z)^2=7^2$

よって，

$x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{7^2}{1^2+2^2+3^2}=\dfrac{7}{2}$

等号は，$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ のとき成り立つから，このとき $x^2+y^2+z^2$ は最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとる。

よって，$\boxed{\text{ア}}$: **2**，$\boxed{\text{イ}}$: **3**，$\boxed{\text{ウ}}$: $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

〈別解〉

$x+2y+3z=7$ から，$x=7-2y-3z$

したがって，

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(7-2y-3z)^2+y^2+z^2\\&=5y^2-(28-12z)y+10z^2-42z+49\\&=5\left(y-\frac{14-6z}{5}\right)^2-\frac{1}{5}(14-6z)^2+10z^2-42z+49\\&=5\left(y-\frac{14-6z}{5}\right)^2+\frac{1}{5}(14z^2-42z+49)\\&=5\left(y-\frac{14-6z}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって，$x^2+y^2+z^2$ は，$z=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{14-6z}{5}=1$，$x=7-2\cdot 1-3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となる。

すなわち，$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとる。