演習問題
解答・解説

第1章 複素数平面

Section 1　複素数平面

【1】 ※ 737-012-001

$\alpha=-3+2i$，$\beta=2+i$ のとき，次の複素数の表す点を複素数平面上に図示せよ。

(1) -2α　　(2) $\alpha+\beta$　　(3) $\alpha-\beta$　　(4) $\alpha+2\beta$

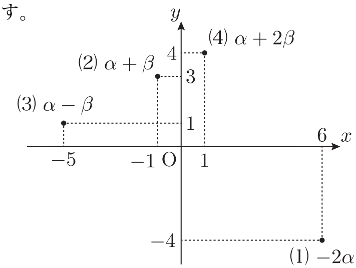
複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

(1) $-2\alpha=-2(-3+2i)=\mathbf{6-4}\boldsymbol{i}$

(2) $\alpha+\beta=(-3+2i)+(2+i)=\mathbf{-1+3}\boldsymbol{i}$

(3) $\alpha-\beta=(-3+2i)-(2+i)=\mathbf{-5+}\boldsymbol{i}$

(4) $\alpha+2\beta=(-3+2i)+2(2+i)=\mathbf{1+4}\boldsymbol{i}$



【2】 ※ 737-012-002

次の複素数と共役な複素数を求めよ。

(1) $1+\sqrt{2}\,i$　　(2) $\dfrac{1}{i}$　　(3) $(3-2i)(1+i)$　　(4) $\dfrac{2-i}{2+i}$

(1) $\mathbf{1-\sqrt{2}}\,\boldsymbol{i}$

(2) $\overline{\left(\dfrac{1}{i}\right)}=\dfrac{1}{\overline{i}}=-\dfrac{1}{i}=\boldsymbol{i}$

(3) $\overline{(3-2i)(1+i)}=\overline{(3-2i)}\cdot\overline{(1+i)}$
$=(3+2i)(1-i)$
$=3-2i^2+(-3+2)i$
$=\mathbf{5-}\boldsymbol{i}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)}=\dfrac{\overline{2-i}}{\overline{2+i}}$
$=\dfrac{2+i}{2-i}$
$=\dfrac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}$
$=\dfrac{3+4i}{4-i^2}$
$=\mathbf{\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}}\boldsymbol{i}$

【3】 ※ 737-012-003

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}+2i$　　(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　(3) $(1-2i)^2$　　(4) $\dfrac{i}{1+i}$

(1) $\left|\sqrt{3}+2i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

(2) $\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$
$=\mathbf{1}$

(3)　$|1-2i|=\sqrt{5}$ より，

$$|(1-2i)^2|=\left(\sqrt{5}\right)^2=\mathbf{5}$$

〈別解〉

$(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$ であるので，

$$\begin{aligned}|(1-2i)^2|&=|-3-4i|\\&=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\\&=5\end{aligned}$$

(4)　$\dfrac{|i|}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$

〈別解〉

$\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{i-i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$ であるので，

$$\begin{aligned}\left|\frac{i}{1+i}\right|&=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

【4】 ※ 737－012－004

複素数 $\alpha,\ \beta$ は，$|\alpha|=3$，$|\beta|=5$，$|\alpha+\beta|=2\sqrt{13}$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1)　$\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}$ の値を求めよ。

(2)　$|\beta-\alpha|$ の値を求めよ。

(1)　$|\alpha+\beta|^2$ について，

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}\\&=|\alpha|^2+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+|\beta|^2\end{aligned}$$

よって，$|\alpha|=3$，$|\beta|=5$，$|\alpha+\beta|=2\sqrt{13}$ が成り立つことから，

$$\left(2\sqrt{13}\right)^2=3^2+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+5^2$$

$$\therefore\quad \overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=\mathbf{18}$$

(2)　$|\beta-\alpha|^2$ について，

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha|^2&=(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\\&=\beta\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}\\&=|\beta|^2-(\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta})+|\alpha|^2\\&=5^2-18+3^2\\&=16\end{aligned}$$

よって，$|\beta-\alpha|>0$ より，

$$|\beta-\alpha|=\mathbf{4}$$

【5】 ※ 737－012－005

複素数 $\alpha,\ \beta$ に対して，次の複素数が実数か，純虚数かを調べよ。

(1)　$z=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$

(2)　$w=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$　ただし，$w\neq 0$

(1)　$\overline{z}$ について，

$$\begin{aligned}\overline{z}&=\overline{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}\\&=\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}\\&=z\end{aligned}$$

したがって，z は**実数**である。

(2)　$\overline{w}$ について，

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\overline{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}\\&=\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}\\&=-w\end{aligned}$$

したがって，w は**純虚数**である。

【6】 ※ 737－012－006

複素数 z は絶対値が 1 で，z^3-z は実数である。このような複素数 z をすべて求めよ。

$|z|=1$ から $|z|^2=1$ が成り立つので，$z\overline{z}=1$

また，z^3-z は実数なので，

$$\begin{aligned} z^3-z &= \overline{z^3-z} \\ &= (\overline{z})^3-\overline{z} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって，

$$\begin{aligned} & z^3-(\overline{z})^3-z+\overline{z}=0 \\ \Leftrightarrow\ & (z-\overline{z})\{z^2+z\overline{z}+(\overline{z})^2\}-(z-\overline{z})=0 \\ \Leftrightarrow\ & (z-\overline{z})\{z^2+|z|^2+(\overline{z})^2-1\}=0 \end{aligned}$$

ここで，$|z|=1$ なので，

$$(z-\overline{z})\{z^2+(\overline{z})^2\}=0$$

ゆえに，$z=\overline{z}$ または $z^2+(\overline{z})^2=0$ が成立する。

(i) $z=\overline{z}$ のとき

z は実数である。よって，$|z|=1$ から，$z=\pm 1$

(ii) $z^2+(\overline{z})^2=0$ のとき

$$(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=0$$

が成り立つので，

$$(z+\overline{z})^2=2$$

よって，$z+\overline{z}=\pm\sqrt{2}$ を得る。ここで，$z=a+bi$ (a, b は実数) とすると，

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+bi)+(a-bi) \\ &= 2a \end{aligned}$$

が成り立つことから，

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$|z|=1$ から，$a^2+b^2=1$ が成り立つので，

$$b=\pm\sqrt{1^2-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに，

$$z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2},\ \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$$

(i)(ii) から，

$$\boldsymbol{z=\pm 1,\ \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2},\ \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}}$$

【7】 ※ 737－012－007

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ。

$z+\dfrac{4}{z}$ は実数であるから，

$$z+\frac{4}{z}=\overline{z}+\frac{4}{\overline{z}}$$

$z\neq 0$ より，両辺に $z\overline{z}(=|z|^2)$ をかけて，

$$\begin{aligned} & |z|^2z+4\overline{z}=|z|^2\overline{z}+4z \\ \Leftrightarrow\ & |z|^2(z-\overline{z})-4(z-\overline{z})=0 \\ \Leftrightarrow\ & (z-\overline{z})(|z|^2-4)=0 \end{aligned}$$

よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2(>0)$ が成立する。

(i) $z=\overline{z}$ のとき

z は実数なので，$|z-2|=2$ から，$z-2=\pm 2$

よって，$z=4,0$ となるが，$z\neq 0$ より，$z=4$

(ii) $|z|=2$ のとき

$|z-2|=2$ の両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned} & |z-2|^2=4 \\ \Leftrightarrow\ & (z-2)(\overline{z}-2)=4 \\ \Leftrightarrow\ & |z|^2-2(z+\overline{z})+4=4 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

いま，$|z|=2$ であるから，$|z|^2=4$

よって，①式は，

$$\begin{aligned} & 4-2(z+\overline{z})=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{z+\overline{z}}{2}=1 \end{aligned}$$

と書き換えられる。

したがって，z の実部が 1 であり，$|z|=2$ と合わせて，

$$z=1\pm\sqrt{3}\,i$$

(i)(ii) より，

$$\boldsymbol{z=4,\ 1\pm\sqrt{3}\,i}$$

【8】 ※ 737－012－008

x に関する方程式 $x^4-x^3+x^2-(a+2)x-a-3=0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a の値をすべて求めよ。

解は $x=ki$（k は実数）とおけるので，方程式に代入して，

$$(ki)^4-(ki)^3+(ki)^2-(a+2)ki-a-3=0$$

これを整理すると，

$$k^4-k^2-a-3+\{k^3-(a+2)k\}i=0$$

a, k が実数なので，

$$\begin{cases} k^4-k^2-a-3=0 & \cdots\cdots ① \\ k^3-(a+2)k=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成立する。

② より，

$$k\{k^2-(a+2)\}=0$$

よって，$k=0$ または $k^2=a+2$ が成り立つ。

(i)　$k=0$ のとき

① から，$a=-3$

(ii)　$k^2=a+2$ のとき

① から，

$$(a+2)^2-(a+2)-a-3=0$$

が得られる。これを整理すると，

$$a^2+2a-1=0$$

となるため，a の 2 次方程式として解いて，

$$a=-1\pm\sqrt{2}$$

を得る。

$k^2=a+2\geqq 0$ であるから，$a\geqq -2$ が成立し，

$$a=-1+\sqrt{2}$$

(i)(ii) より，

$$a=\mathbf{-3,\ -1+\sqrt{2}}$$

Section 2　極形式

【9】 ※ 737－012－009

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満の範囲とする。

(1) $\sqrt{3}+i$　(2) -2　(3) $3i$　(4) $\dfrac{1-i}{2i}$

(1)　$\boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2)　$\boldsymbol{2(\cos\pi+i\sin\pi)}$

(3)　$\boldsymbol{3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}$

(4)　$$\frac{1-i}{2i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i-i^2}{2i^2}=\frac{1+i}{-2}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)}$$

【10】 ※ 737－012－010

次の 2 つの複素数について，z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ の絶対値と偏角をそれぞれ求めよ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満の範囲とする。

(1) $z_1=1-\sqrt{3}i$，$z_2=-1+i$　(2) $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$，$z_2=-1+\sqrt{3}i$

(1)　z_1, z_2 について，

$$|z_1|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2,\ \arg z_1=-\frac{\pi}{3}$$

$$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\ \arg z_2=\frac{3}{4}\pi$$

が成立する。よって，

$$|z_1z_2|=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

$$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2=-\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\mathbf{\sqrt{2}}$$

また，

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$
$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi=-\frac{13}{12}\pi$$

であるが，偏角の範囲を考慮して，

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=-\frac{13}{12}\pi+2\pi=\boldsymbol{\frac{11}{12}\pi}$$

(2) z_1, z_2 について，

$$|z_1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$
$$,\ \arg z_1=\frac{\pi}{6}$$
$$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,\ \arg z_2=\frac{2}{3}\pi$$

が成立する。よって，

$$|z_1z_2|=\mathbf{2}$$
$$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$$
$$=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

また，

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\pi$$

であるが，一般角を考えて，

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}\pi+2\pi=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

【11】 737−012−011

次の式の値を求めよ。

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5$　(2) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$

(3) $(-1+i)^4$　(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{-12}$

ド・モアブルの定理を利用する。

(1) $$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(2) $$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\boldsymbol{i}$$

(3) $$(-1+i)^4=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^4$$
$$=4(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)$$
$$=\mathbf{-4}$$

(4) $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{-12}$$
$$=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-12}$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=\mathbf{1}$$

【12】 737−012−012

$z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ について，

(1) $\frac{z}{1+i}$ を $a+bi$ の形に表せ。ただし，a, b は実数とする。

(2) z を極形式で表せ。

(3) z^{12} を計算せよ。

(1) $\dfrac{z}{1+i}$ について,

$$\begin{aligned}
&\frac{z}{1+i}\\
&=\frac{z(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\
&=\frac{z(1-i)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)(1-i)\\
&=\frac{1}{4}\Big\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\\
&\qquad -(\sqrt{3}-1)i-(\sqrt{3}+1)i^2\Big\}\\
&=\frac{1}{4}(2\sqrt{3}+2i)\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{z}{1+i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ から,

$$z=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \quad \cdots\cdots ①$$

ここで,

$$\begin{aligned}
1+i&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\
&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

および,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

が成立するので，これらを ① に代入して,

$$\begin{aligned}
z&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&\qquad\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right.\\
&\qquad\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)}
\end{aligned}$$

(3) z^{12} について，ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned}
z^{12}&=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}\pi\times 12\right)\right.\\
&\qquad\left.+i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\times 12\right)\right\}\\
&=2^6(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)\\
&=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)\\
&=\boldsymbol{-64}
\end{aligned}$$

【13】 737-012-013

2 つの 0 でない複素数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \qquad (r_1>0)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \qquad (r_2>0)$$

があるとき，次の問いに答えよ。

(1) $|z_1+z_2|$ を r_1, r_2, θ_1, θ_2 を用いて表せ。

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。また，等号が成立する条件を答えよ。

$$|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$$

(1) z_1+z_2 について,

$$z_1+z_2=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)i$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|&=\sqrt{(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2}\\
&=\sqrt{{r_2}^2+{r_2}^2+2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}\\
&=\boldsymbol{\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}
\end{aligned}$$

(2) $\cos(\theta_1-\theta_2) \leqq 1$ かつ $r_1>0$, $r_2>0$ より,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2| &\leqq \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2+2r_1r_2}\\ &=\sqrt{(r_1+r_2)^2}\\ &=r_1+r_2\\ &=|z_1|+|z_2|\end{aligned}$$

等号が成立するのは, $\cos(\theta_1-\theta_2)=1$, すなわち,

$$\boldsymbol{\theta_1-\theta_2=2n\pi} \quad (\boldsymbol{n} \text{ は整数})$$

となるときである。 ■

〈参考〉

等号が成立するとき, 3 点 O, z_1, z_2 が一直線上に並ぶ。

【14】 737-012-014

複素数 $\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ について, α^n が正の実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

α について,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}\\ &=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

と変形できる。よって, ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned}\alpha^n &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right\}^n\\ &=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right.\\ &\qquad\left.+i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right\}\end{aligned}$$

α^n が正の実数となるのは,

$$\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)>0$$

かつ,

$$\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)=0$$

が成り立つときである。このとき,

$$\frac{\pi}{12}n=2m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

すなわち,

$$n=24m$$

が成立する。これを満たす整数 n が最小となるのは $m=1$ のときであり, このとき $n=\boldsymbol{24}$

【15】 737-012-015

以下の空欄に当てはまる値を求めよ。

(1) 複素数 $\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}$ の偏角は $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし, 偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(2) $\left(\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n$ が実数となるような最小の自然数 n は, $n=\boxed{\text{イ}}$ である。またそのとき, $\left(\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n$ の絶対値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$: $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$，$\boxed{\text{イ}}$: **3**

$\boxed{\text{ウ}}$: **27**

(1)　複素数 $\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}$ について，

$$\begin{aligned}\frac{6}{1-\sqrt{3}\,i} &= \frac{6(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}\\ &= \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}\,i)\\ &= 3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

よって，偏角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。

(2)　(1) より，ド・モアブルの定理より，

$$\left(\frac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n = 3^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

これが実数となるとき，

$$\frac{n\pi}{3} = m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

すなわち，

$$n = 3m$$

が成立する。よって，条件を満たす自然数 n が最小となるのは $m=1$ のときで，このとき $n=3$ となる。

また，$n=3$ のとき，

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n\right| &= |3^3(\cos\pi + i\sin\pi)|\\ &= 27\end{aligned}$$

【16】 737－012－016

複素数 z は，$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす。

(1)　複素数 z の値を求めよ。

(2)　$\alpha = z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ の両辺に z をかけて，整理すると，

$$z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$$

が得られる。これを解いて，

$$z = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}}$$

(2)　(1) より，

$$z = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

（複号同順）

ここで，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{6}$ とすると，ド・モアブルの定理より，

$$\begin{aligned}\alpha &= z^{100}+z^{-100}\\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)^{100} + (\cos\theta+i\sin\theta)^{-100}\\ &= (\cos 100\theta + i\sin 100\theta) + \{\cos(-100\theta)+i\sin(-100\theta)\}\\ &= 2\cos 100\theta\\ &= 2\cos\left(\pm\frac{100}{6}\pi\right)\\ &= 2\cos\frac{100}{6}\pi\\ &= 2\cos\frac{2}{3}\pi\\ &= 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

1

第1章　複素数平面

【17】 ※ 737－012－017

Ⅰ　以下は，ある問題に対しての A さん，B さん，C さんの会話である。問題と会話文を読み，後の問いに答えよ。

問題：$z^2 = i$ を満たす複素数 z を求めよ。

A「$z = \pm\sqrt{i}$ で解けるね！」
B「それは ① 良くないよ！。② $z = a + bi$　(a, b は実数) とおいて解くのが良いと思うよ。」
C「それもいいけど，③ ド・モアブルの定理を使うっていう手もあるよね！」

(1)　① の理由を述べよ。
(2)　② を実行せよ。
(3)　③ を実行せよ。

Ⅱ　$z^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を解け。

Ⅰ(1)　複素数とは，$z = a + bi$ (a, b は実数) を満たす数のことであり，$z = \pm\sqrt{i}$ はこの形を満たしていないから。

(2)　$z = a + bi$ (a, b は実数) とするとき，

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

となるため，$z^2 = i$ のとき，

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & \cdots\cdots ④ \\ 2ab = 1 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成立する。

④ より，$a = \pm b$

また，⑤ より，$ab > 0$ であるから，a, b は同符号である。よって，$a = b$

⑤ に $b = a$ を代入して，$2a^2 = 1$

以上から，$a = b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つので，

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad \text{(複号同順)}$$

(3)　$|z^2| = |i| = 1$ より，$|z| = 1$ が成り立つ。よって，

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \ (0 \leqq \theta < 2\pi) \quad \cdots\cdots ⑥$$

とおけるので，ド・モアブルの定理より，

$$z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

と表すことができる。

ここで，$z^2 = i$ であるから，

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

が成立するのでこれを整理して，

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす n は，$n = 0, 1$ であるため，

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

これを ⑥ に代入して，

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad \text{(複号同順)}$$

Ⅱ　$|z^2| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ より，$|z| = 1$

したがって，

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \ (0 \leqq \theta < 2\pi) \quad \cdots\cdots ⑦$$

とおけるので，ド・モアブルの定理より，

$$z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

が成り立つ。$z^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ であるため，これと合わせて，

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

これを整理すると，$\theta = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$ となるが，$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす n は $n = 0, 1$ なので，

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

⑦ に代入すると，

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$$

が得られるのでこれを整理して，

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i} \quad \text{(複号同順)}$$

【18】 ※ 737－012－018

方程式 $z^6=1$ を解け。

$|z^6|=|z|^6=1$ より，$|z|=1$ が成り立つ。

$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ …… ①

とすると，ド・モアブルの定理より，

$z^6=\cos 6\theta+i\sin 6\theta$

が成立するので，$z^6=1$ と合わせて，

$6\theta=2n\pi$ (n は整数)

を得る。よって，

$\theta=\dfrac{n\pi}{3}$

が成立するが，$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす n は，

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

である。したがって，

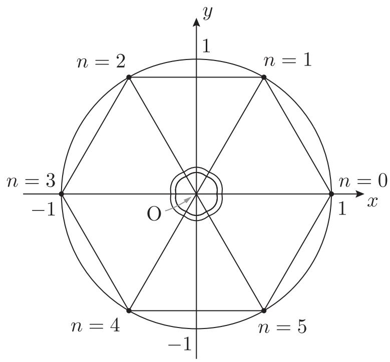
$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

が得られるので，これを ① に代入して，

$$\boldsymbol{z=1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{-1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

〈参考〉

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。$z^6=1$ の解を複素数平面上で図示すると，次図の各点になる。



【19】 ※ 737－012－019

方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}i$ を解け。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (0\leqq\theta<2\pi)$

…… ①

とすると，ド・モアブルの定理より，

$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

と表せる。また，

$$-8+8\sqrt{3}i=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

より，

$r^4=16$ …… ②

かつ，

$4\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$ (n は整数) …… ③

が成立する。

② より，$r>0$ から，$r=2$ が成り立つので，これを ① に代入して，

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ …… ④

を得る。

また，③ より，

$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{2}$

が成立するが，$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす n は，

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$

である。よって，

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

これを ④ に代入すると，

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right),\ 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right),\ 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

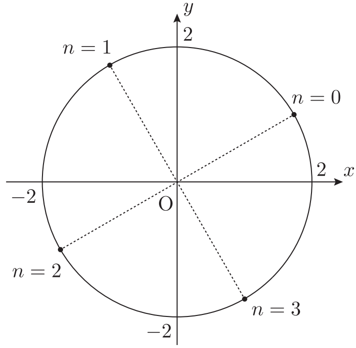
が得られるのでこれを整理して，

$$\boldsymbol{z = \sqrt{3} + i,\ -1 + \sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{3} - i,\ 1 - \sqrt{3}\,i}$$

〈参考〉

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$ の解を複素数平面上で図示すると，次図の各点になる。



【20】 737－012－020

$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ を求めたい。

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

とおく。$z^n = 1$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ア}}$ であるから，z は方程式

$$z^4 + \boxed{\text{イ}}\, z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

の解となる。そこで，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと，w は方程式

$$w^2 + \boxed{\text{ウ}}\, w - \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解となる。$\dfrac{1}{z} = \cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ および $\cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$ であることから，

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \boxed{\text{オ}}$$

を得る。

$\boxed{\text{ア}}$: **5**, $\boxed{\text{イ}}$: **1**

$\boxed{\text{ウ}}$: **1**, $\boxed{\text{エ}}$: **1**

$\boxed{\text{オ}}$: $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

z^n について，ド・モアブルの定理より，

$$z^n = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{5} + i\sin\frac{2n\pi}{5}$$

よって，$z^n = 1$ を満たす最小の自然数 n は，

$$\frac{2n\pi}{5} = 2\pi$$

より，$n = 5$ である。

よって，z は方程式 $z^5 = 1$ の解であることがわかる。したがって，

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

が成立し，$z \neq 1$ から，z は，

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解である。

$z \neq 0$ であるから，① の両辺を z^2 で割ると，

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。ここで，

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$$

であるから，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とするとき，②式は，

$$(w^2 - 2) + w + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \ w^2 + w - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

と変形できる。③ を解いて，

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

また，

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{1}{z} \\ &= \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \\ &\qquad + \left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0 \end{aligned}$$

であるから，

$$w = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

したがって，

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Section 3　複素数と図形

【21】 ※ 737–012–021

$\alpha = 3 - 2i$，$\beta = 9 - 5i$ の表す点をそれぞれ A，B とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を $2:1$ に内分する点

(2)　線分 AB を $3:2$ に外分する点

(3)　線分 AB の中点

(4)　原点を O とするとき，△OAB の重心

(1) $$\begin{aligned} \frac{\alpha + 2\beta}{2+1} &= \frac{3 - 2i + 2(9 - 5i)}{3} \\ &= \frac{21 - 12i}{3} \\ &= \boldsymbol{7 - 4i} \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \frac{-2\alpha + 3\beta}{3 + (-2)} &= -2(3 - 2i) + 3(9 - 5i) \\ &= \boldsymbol{21 - 11i} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{3 - 2i + 9 - 5i}{2} \\ &= \boldsymbol{6 - \frac{7}{2}i} \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} \frac{0 + \alpha + \beta}{3} &= \frac{12 - 7i}{3} \\ &= \boldsymbol{4 - \frac{7}{3}i} \end{aligned}$$

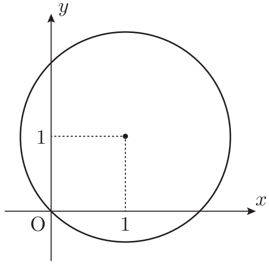
【22】 ※ 737–012–022

次の等式を満たす点 z は，複素数平面上でどのような図形を描くか図示せよ。

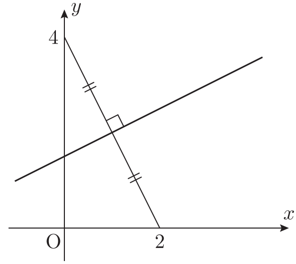
(1) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$　　　(2) $|z - 2| = |z - 4i|$

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

(1) $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ より，z は点 $1+i$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ の円を描く。



(2) $|z-2|=|z-4i|$ より，z は 2 点 2, $4i$ を端点とする線分の垂直二等分線を描く。



【23】 737－012－023

複素数平面上の点 z が条件 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき，点 z はどのような図形を描くか図示せよ。

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

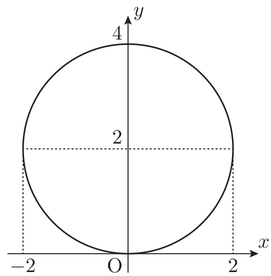
$2|z-i|=|z+2i|$ の両辺を 2 乗すると，

$$4|z-i|^2=|z+2i|^2$$

が得られるので，

$$\begin{aligned}
&4(z-i)(\overline{z-i})=(z+2i)(\overline{z+2i})\\
\Leftrightarrow\ &4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)\\
\Leftrightarrow\ &4(z\overline{z}+iz-i\overline{z}-i^2)\\
&\qquad=z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}-4i^2\\
\Leftrightarrow\ &3z\overline{z}+6iz-6i\overline{z}=0\\
\Leftrightarrow\ &(z-2i)(\overline{z}+2i)=4\\
\Leftrightarrow\ &(z-2i)(\overline{z-2i})=4\\
\Leftrightarrow\ &|z-2i|^2=4
\end{aligned}$$

したがって，$|z-2i|>0$ より，$|z-2i|=2$ となるので，z は中心が $2i$，半径が 2 の円を描き，次図のようになる。



【24】 737－012－024

複素数 $2-i$ に対応する点を z とする。次の問いに答えよ。

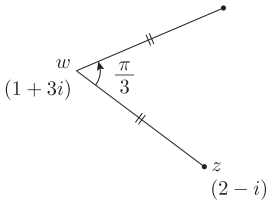
(1) 点 z を原点 O の周りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点を求めよ。

(2) 点 z を点 $\mathrm{A}(1+3i)$ の周りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を求めよ。

(1)　求める点は，

$$(2-i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=(2-i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}+1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i}$$

(2)　$w=1+3i$ とする。

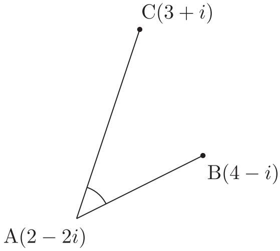


求める点は，

$$(z-w)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+w$$
$$=(1-4i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1+3i$$
$$=\frac{1+4\sqrt{3}}{2}+\frac{-4+\sqrt{3}}{2}i+1+3i$$
$$=\boldsymbol{\frac{3+4\sqrt{3}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i}$$

【25】 ※ 737–012–025

複素数平面上に 3 点 $A(2-2i)$，$B(4-i)$，$C(3+i)$ がある。このとき，$\angle BAC$ の大きさを求めよ。



$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とすると，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(3+i)-(2-2i)}{(4-i)-(2-2i)}$$
$$=\frac{1+3i}{2+i}$$
$$=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{5+5i}{4+1}$$
$$=1+i$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，

$$\angle BAC=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

【26】 ※ 737–012–026

複素数平面上に 3 点 $A(4+5i)$，$B(-2+i)$，$C(3+xi)$ がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，実数 x の値を定めよ。

(2)　2 直線 AB，AC が垂直に交わるように，実数 x の値を定めよ。

$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ とする。

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であればよい。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(3+xi)-(4+5i)}{(-2+i)-(4+5i)}$$
$$=\frac{-1+(x-5)i}{-6-4i}$$
$$=-\frac{\{-1+(x-5)i\}}{2(3+2i)}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}$$
$$=-\frac{-3+2(x-5)+\{2+3(x-5)\}i}{2(3^2+2^2)}$$
$$=\frac{-2x+13+(-3x+13)i}{26}$$

と変形できるので，$-3x+13=0$ より，

$$x=\mathbf{\frac{13}{3}}$$

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数であればよい。よって，(1) より，

$$-2x+13=0$$

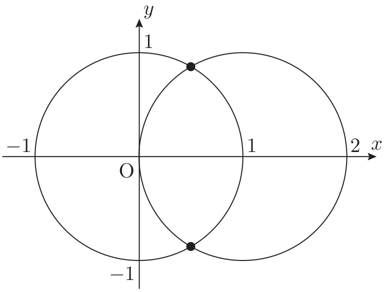
を満たす x が求める x であるため，

$$x=\mathbf{\frac{13}{2}}$$

【27】 737-012-027

(1) 等式 $|z|=|z-1|=1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。
(2) (1) で求めた複素数のうち，偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ が最小となるものを w とする。このとき，$w^n=1$ を満たす自然数 n を小さいものから 3 つ求めよ。

(1) $|z|=1$ は，原点を中心とした半径の大きさ 1 の円，$|z-1|=1$ は点 1 を中心として半径の大きさ 1 の円をそれぞれ表すことから，z はこの 2 円の交点となる。



したがって，

$$z=\mathbf{\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

〈別解〉

$|z|=1$ から，

$$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおける。これを $|z-1|=1$ に代入して，

$$|\cos\theta-1+i\sin\theta|=1$$

両辺を 2 乗して，

$$|\cos\theta-1+i\sin\theta|^2=1^2$$

を得る。よって，

$$(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=1$$

$$\Leftrightarrow\ (\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\cos\theta+1=1$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{2}$$

が得られるため，

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

したがって，

$$z=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

(2) (1) より，

$$w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

が成り立つ。よって，ド・モアブルの定理より，

$$w^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

$w^n=1$ のとき，m を整数とすれば，

$$\frac{n\pi}{3}=2m\pi\ \Leftrightarrow\ n=6m$$

が成り立つので，

$$n=\mathbf{6,\ 12,\ 18}$$

【28】 737-012-028

複素数平面上で z と z^5 が原点 O に関して点対称の位置にあるとき，z の値を求めよ。ただし，$z\neq0$ とする。

z と z^5 が原点に関して点対称の位置にあることより，

$$z^5=-z$$

が成り立つ。よって，

$$z^5+z=0$$

$$\Leftrightarrow\ z(z^4+1)=0$$

$z\neq0$ であるから，$z^4=-1$ が成立すること

がわかる。

$|z^4|=|z|^4=1$ より，$|z|=1$ であるから，

$$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

とすると，ド・モアブルの定理より，

$$z^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$$

が成り立つが，$z^4=-1$ であるから，

$$\cos 4\theta+i\sin 4\theta=-1$$

よって，n を整数として，

$$4\theta=\pi+2n\pi \iff \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす n は，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ なので，

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

が得られる。したがって，求める z の値は，

$$z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\quad(\text{複号任意})$$

【29】 737–012–029

I　複素数平面上の点 z に次の移動を行った点について，空欄にあてはまる数式を z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表せ。

z を実軸に関して対称移動した点は $\boxed{\text{ア}}$ で，z を虚軸に関して対称移動した点は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，z を原点に関して対称移動した点は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

II　複素数平面上に，原点 O と異なる点 $\mathrm{A}(1+2i)$ があり，2 点 O，A を通る直線を l とする。直線 l に関して，点 $\mathrm{B}(5+5i)$ と対称な点を求めよ。

I　$\boxed{\text{ア}}$：$\overline{z}$，$\boxed{\text{イ}}$：$-\overline{z}$

$\boxed{\text{ウ}}$：$-z$

$z=a+bi$（$a,\ b$ は実数）とおくと，$\overline{z}=a-bi$ である。

z を実軸に関して対称移動した点は，

$$a-bi=\overline{z}$$

z を虚軸に関して対称移動した点は，

$$-a+bi=-\overline{z}$$

z を原点に関して対称移動した点は，

$$-a-bi=-z$$

II　$\alpha=1+2i$，$z=5+5i$ とし，点 B の直線 l に関する対称点を $\mathrm{B}'(z')$ とする。また，

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと，

$$r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

から，

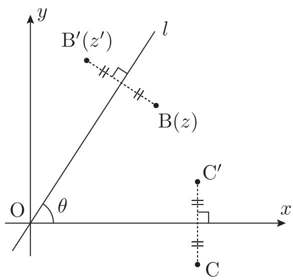
$$\alpha=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

であり，θ は，

$$0\leqq\theta<2\pi,\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

を満たす。

点 B，B′ を原点の周りに $-\theta$ 回転して得られる点を C，C′ とすると，C と C′ は実軸に対して対称となる。



C を表す複素数を w とすると，

$$\begin{aligned}w&=\beta\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\&=(5+5i)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)\\&=5(1+i)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1-2i)\\&=\sqrt{5}(3-i)\end{aligned}$$

となる。

C′ を表す複素数は $\overline{w}$ であるから，

$$\overline{w}=\overline{\sqrt{5}(3-i)}=\sqrt{5}(3+i)$$

が得られる。

$\mathrm{C}'(\overline{w})$ を原点の周りに θ 回転して得られる

点が $\mathrm{B}'(z')$ であるから，

$$\begin{aligned} z' &= \overline{w}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{5}\,(3+i)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right) \\ &= (3+i)(1+2i) \\ &= \boldsymbol{1+7i} \end{aligned}$$

【30】 737－012－030

Ⅰ　原点を O とする複素数平面上で $1+i$ に対応する点を A とする。△OAB が正三角形であるとき，点 B の表す複素数を求めよ。

Ⅱ　複素数平面上で 3 点 $\alpha = 1-2\sqrt{3}\,i$，$\beta = 4-\sqrt{3}\,i$，γ があり，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする。△ABC が $\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，γ を求めよ。

Ⅰ　点 B は $\mathrm{A}(1+i)$ を原点 O の周りに $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点であるので，点 B を表す複素数を z とすると，

$$z = (1+i)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

（複号同順）

$$= (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1\mp\sqrt{3}}{2} + \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}i \quad \text{（複号同順）}$$

が成り立つ。

よって，点 B を表す複素数は，

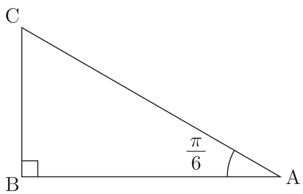
$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i}$$

または，

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i}$$

である。

Ⅱ　$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \sqrt{3} : 2$，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$ である。



よって，線分 AC は，点 A を中心として線分 AB を $\dfrac{\pi}{6}$ または $-\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 倍したものであるので，

$$\begin{aligned} &\gamma - \alpha \\ &= (\beta-\alpha) \\ &\quad \times \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\} \end{aligned}$$

（複号同順）

$$= (3+\sqrt{3}\,i)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\right)$$

$$= (3+\sqrt{3}\,i)\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)$$

$$= (3 \pm i^2) + \left(\sqrt{3} \pm \frac{3}{\sqrt{3}}\right)i \quad \text{（複号同順）}$$

が成立する。したがって，

$$\gamma - \alpha = 2 + 2\sqrt{3}\,i \quad \text{または} \quad 4$$

が成り立つので，

$$\gamma = \boldsymbol{3} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{5 - 2\sqrt{3}\,i}$$

〈補足〉

線分 BC は，点 B を中心として，線分 BA を $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転し，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものとして考えても良い。

【31】 ※ 737–012–031

異なる複素数 α, β, γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。

(2)　複素数平面上で，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か。

(1)　与えられた等式から，

$$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$$

が得られる。$\beta\neq\alpha$ より，

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$$

が得られるので，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boldsymbol{\pm i}$$

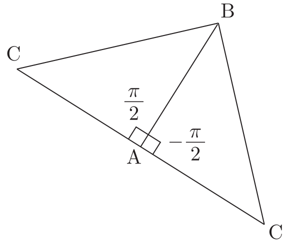
(2)　$\pm i$ について，

$$\pm i=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つので，

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

したがって，線分 AC は線分 AB を $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転させたものである。いずれにせよ，$\triangle\mathrm{ABC}$ は，**$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。**



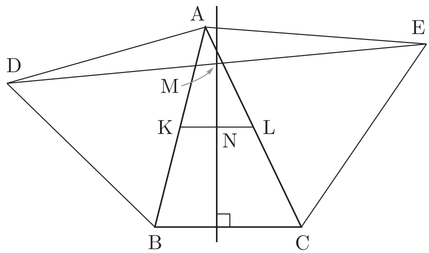
【32】 ※ 737–012–032

複素数平面上に三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB，ACE とがある。ただし，点 C，点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また，点 B，点 E は直線 AC に関して反対側にある。線分 AB の中点を K，線分 AC の中点を L，線分 DE の中点を M とする。線分 KL の中点を N とするとき，直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ。

複素数平面上で，A を原点とし，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする。また，$\mathrm{D}(d)$，$\mathrm{E}(e)$，$\mathrm{K}(k)$，$\mathrm{L}(l)$，$\mathrm{M}(m)$，$\mathrm{N}(n)$ とおく。

$\mathrm{MN}\perp\mathrm{BC}$ は，$\dfrac{n-m}{\gamma-\beta}$ が純虚数であることと同値であるため，このことを示す。

図のように，3 点 A，B，C が反時計回りの順にあるとしても一般性を失わない。



K，L，N はそれぞれ線分 AB，AC，KL の中点であるから，

$$k=\frac{1}{2}\beta,\ l=\frac{1}{2}\gamma$$

$$n = \frac{1}{2}(k+l) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{4}(\beta+\gamma)$$

が成り立つ。

点 D は点 B を，点 A を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点なので，

$$d = \beta\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2}\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta i$$

が成り立つ。

同様に，点 E は点 C を，点 A を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点なので，

$$e = \gamma\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma i$$

が成立する。

また，点 M は線分 DE の中点なので，

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}(d+e) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta i\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}(\beta+\gamma) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\beta-\gamma)i \end{aligned}$$

が成立する。

したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{n-m}{\gamma-\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(\beta+\gamma) - \left\{\frac{1}{4}(\beta+\gamma) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\beta-\gamma)i\right\}}{\gamma-\beta} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}i \end{aligned}$$

が成立することから，MN ⊥ BC ■

【33】 ※737－012－033

-1 と異なる複素数 z に対し，複素数 w を $w = \frac{z}{z+1}$ で定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) z が複素数平面の虚軸上を動くとき，w が描く図形を図示せよ。

(2) z が複素数平面上の円 $|z-1| = 1$ 上を動くとき，w が描く図形を図示せよ。

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

$w = \frac{z}{z+1}$ を z について解くと，

$$w(z+1) = z \iff (w-1)z + w = 0$$

が得られるのでこれを整理して，

$$z = \frac{w}{1-w}\quad (ただし，w \neq 1) \quad \cdots\cdots ①$$

(1) z が虚軸上を動くとき $z = 0$ が成立するか，z は純虚数となる。いずれにせよ，

$$z = -\overline{z} \iff z + \overline{z} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

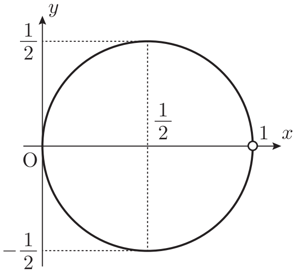
が成立する。① を ② に代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{w}{1-w} + \overline{\left(\frac{w}{1-w}\right)} = 0 \\ \iff &\frac{w}{1-w} + \frac{\overline{w}}{1-\overline{w}} = 0 \\ \iff &w(1-\overline{w}) + \overline{w}(1-w) = 0 \\ \iff &w + \overline{w} - 2w\overline{w} = 0 \\ \iff &w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = 0 \\ \iff &\left(w - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0 \\ \iff &\left(w - \frac{1}{2}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \\ \iff &\left|w - \frac{1}{2}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

よって，$\left|w - \frac{1}{2}\right| > 0$ より，

$$\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\quad (w \neq 1)$$

が得られるので，w は図のように，点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円から，点 1 を除いたものである。



(2)　$|z-1|=1$ に ① を代入すると，

$$\left|\frac{w}{1-w}-1\right|=1$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{2w-1}{1-w}\right|=1$$
$$\Leftrightarrow |2w-1|=|w-1|$$

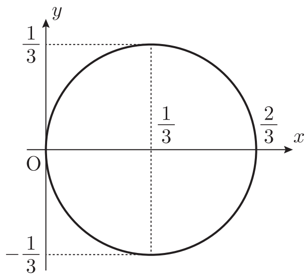
が得られる。両辺を 2 乗して，

$$|2w-1|^2=|w-1|^2$$
$$\Leftrightarrow (2w-1)\overline{(2w-1)}=(w-1)\overline{(w-1)}$$
$$\Leftrightarrow (2w-1)(2\overline{w}-1)=(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$\Leftrightarrow 4w\overline{w}-2w-2\overline{w}+1 = w\overline{w}-w-\overline{w}+1$$
$$\Leftrightarrow w\overline{w}-\frac{1}{3}w-\frac{1}{3}\overline{w}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(w-\frac{1}{3}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(w-\frac{1}{3}\right)\overline{\left(w-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{3}\right|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

したがって，$\left|w-\frac{1}{3}\right|>0$ より，

$$\left|w-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

が得られるので，w は図のように点 $\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円を描く。



【34】 ※ 737－012－034

z を複素数とし，i を虚数単位とする。

(1)　$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2)　z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

(1)　$z+i\neq 0$ かつ $z-i\neq 0$ なので，$z\neq \pm i$ である。

ここで，

$$\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\frac{2z}{z^2+1}$$

であり，これが実数のとき，

$$\frac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)}$$

が成り立つ。式を整理すると，

$$\frac{2z}{z^2+1}=\frac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}$$

両辺に $\dfrac{(z^2+1)\{(\overline{z})^2+1\}}{2}$ をかけると，

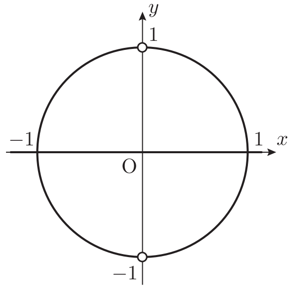
$$z\{(\overline{z})^2+1\}=\overline{z}(z^2+1)$$
$$\Leftrightarrow \overline{z}|z|^2+z-z|z|^2-\overline{z}=0$$
$$\Leftrightarrow (z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$$

が得られるので，$|z|>0$ を踏まえると，

$$z=\overline{z} \text{ または } |z|=1$$

が成立する。

したがって，z は実数，または $|z|=1$ $(z\neq\pm i)$ であるので，求める図形は実軸および原点を中心とした半径が 1 の円から 点 $i, -i$ を除いたものである。よって次図のようになる。



(2) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ を z について解くと，

$$wz-iw=z+i$$
$$\Leftrightarrow\ (w-1)z=(w+1)i$$
$$\Leftrightarrow\ z=\frac{w+1}{w-1}i\ (w\neq 1)$$

これを (1) で求めた z に代入する。

(i) z が実数のとき

$z=\overline{z}$ から，

$$\frac{w+1}{w-1}i=\overline{\left(\frac{w+1}{w-1}i\right)}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{w+1}{w-1}i=\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1}(-i)$$
$$\Leftrightarrow\ (w+1)(\overline{w}-1)+(\overline{w}+1)(w-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\ |w|^2-w+\overline{w}-1+|w|^2-\overline{w}+w-1=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2|w|^2=2$$

が成立するので，$|w|>0$ より，

$$|w|=1\ (w\neq 1)$$

したがって，点 w は原点を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，点 1 を除く。

(ii) $|z|=1$ かつ $z\neq\pm i$ のとき

$\left|\dfrac{w+1}{w-1}i\right|=1$ から，

$$\frac{|w+1|}{|w-1|}|i|=1$$
$$\Leftrightarrow\ |w+1|=|w-1|$$

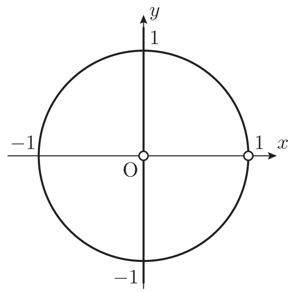
が得られる。また，$\dfrac{w+1}{w-1}i\neq\pm i$ から，

$$\frac{w+1}{w-1}\neq\pm1\ \Leftrightarrow\ w\neq 0$$

が得られる。

よって，点 w は 2 点 1, −1 を結ぶ線分の垂直二等分線（虚軸）上を動く。ただし，原点を除く。

(i)(ii) から，点 w の描く図形は次図のようになる。



【35】 737－012－035

複素数 z が $|z|\leqq 1$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $z+2i$ の存在する領域（範囲）を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(z+2i)^2$ の絶対値 r の範囲を求めよ。

(3) $(z+2i)^2$ の偏角 θ の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

複素数平面上において，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として表す。

(1) $w=z+2i$ とすると，

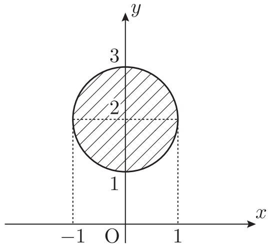
$$z=w-2i$$

これを $|z|\leqq 1$ に代入すると，

$$|w-2i|\leqq 1$$

が得られる。

よって，点 $z+2i$ は，点 $2i$ を中心とする半径 1 の円周，およびその内部を動くので，次図の斜線部のようになる。ただし，境界線は含む。



(2)　(1) の図から，

$$1 \leqq |z+2i| \leqq 3$$

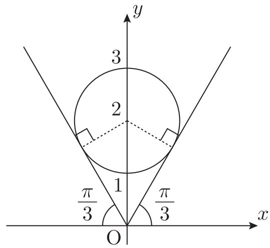
であることがわかる。$r=|z+2i|^2$ より，

$$\boldsymbol{1 \leqq r \leqq 9}$$

(3)　(1) の図から，

$$\frac{\pi}{3} \leqq \arg(z+2i) \leqq \frac{2}{3}\pi$$

であることがわかる。



ここで，

$$\theta = \arg w^2 = 2\arg w$$

であるから，

$$\boldsymbol{\frac{2\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{4}{3}\pi}$$