演習問題
解答・解説

第1章
数と式

Section 0 中学数学の復習

【1】 717-012-001

2 つの整式 $A=2x^2-5x-7$，$B=x^2-4x-3$ について，$C=4A-8B-3(A-2B)$ を計算せよ。

与式を展開して，

$$\begin{aligned} C &= 4A-8B-3A+6B \\ &= A-2B \\ &= \left(2x^2-5x-7\right)-2\left(x^2-4x-3\right) \\ &= 2x^2-5x-7-2x^2+8x+6 \\ &= \boldsymbol{3x-1} \end{aligned}$$

【2】 717-012-002

次の式を計算せよ。

(1) $(-8a)\times\left(-\frac{1}{4}a^2\right)^2\times(-2a)^3$ (2) $\left(-\frac{1}{3}a^2b\right)^3\times(-3ab^2)^2$

(1) $$\begin{aligned}(\text{与式}) &= -8a\times\frac{1}{16}a^4\times(-8a^3) \\ &= \frac{(-8)\cdot(-8)}{16}\cdot a^{1+4+3} \\ &= \boldsymbol{4a^8}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(\text{与式}) &= -\frac{1}{3^3}a^6b^3\times3^2a^2b^4 \\ &= -\frac{3^2}{3^3}a^{6+2}b^{3+4} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}a^8b^7}\end{aligned}$$

【3】 717-012-003

次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)^2$ (2) $(t-4)^2$ (3) $(x+y)(x-y)$
(4) $(x+3)(x+2)$ (5) $(t-2)(t+4)$ (6) $(y+3)(y-7)$
(7) $(x-5)(x-6)$

(1) $\boldsymbol{x^2+6x+9}$ (2) $\boldsymbol{t^2-8t+16}$ (3) $\boldsymbol{x^2-y^2}$ (4) $\boldsymbol{x^2+5x+6}$
(5) $\boldsymbol{t^2+2t-8}$ (6) $\boldsymbol{y^2-4y-21}$ (7) $\boldsymbol{x^2-11x+30}$

【4】 717-012-004

次の式を因数分解せよ。

(1) x^2+4x+4 (2) x^2-6x+9 (3) x^2-25y^2 (4) x^2+5x+6

(1) $\boldsymbol{(x+2)^2}$　(2) $\boldsymbol{(x-3)^2}$　(3) $\boldsymbol{(x+5y)(x-5y)}$
(4) $\boldsymbol{(x+2)(x+3)}$

【5】 ❈ 717－012－005

次の数の平方根を求めよ。

(1) 5　(2) 17　(3) 23　(4) 49　(5) 1600

(1) $\boldsymbol{\pm\sqrt{5}}$　(2) $\boldsymbol{\pm\sqrt{17}}$　(3) $\boldsymbol{\pm\sqrt{23}}$　(4) $\boldsymbol{\pm 7}$　(5) $\boldsymbol{\pm 40}$

【6】 ❈ 717－012－006

次の数を，根号（$\sqrt{\ }$のこと）を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{16}$　(2) $\sqrt{2304}$　(3) $-\sqrt{100}$　(4) $\sqrt{(-5)^2}$
(5) $-\sqrt{(-18)^2}$

(1) $\boldsymbol{4}$　(2) $\boldsymbol{48}$　(3) $\boldsymbol{-10}$　(4) $\boldsymbol{5}$　(5) $\boldsymbol{-18}$

【7】 ❈ 717－012－007

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ を利用し，次の計算をせよ。なお，根号は簡単な形に直せ。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$　(2) $-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$
(3) $-\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{7}\right)$　(4) $-\sqrt{42}\div\left(-\sqrt{6}\right)$
(5) $\sqrt{14}\times\sqrt{2}\div\sqrt{7}$　(6) $\sqrt{28}\div\left(-\sqrt{6}\right)\times\sqrt{3}$

(1) $\boldsymbol{\sqrt{10}}$　(2) $\boldsymbol{-\sqrt{6}}$　(3) $\boldsymbol{\sqrt{14}}$　(4) $\boldsymbol{\sqrt{7}}$　(5) $\boldsymbol{2}$　(6) $\boldsymbol{-\sqrt{14}}$

【8】 ❈ 717－012－008

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$ を利用し，次の式を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(1)
$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

(2)
$$\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{10\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{7-2}$$
$$=\boldsymbol{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}$$

(3)
$$（与式）=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}}{3-2}$$
$$=\boldsymbol{10}$$

Section 1　展開と因数分解

【9】 ※ 717－012－009

次の式を展開せよ。

(1) $(a+3b-c)^2$　(2) $(a+3)^3$　(3) $(2x-y)^3$

(1) $\boldsymbol{a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca}$　(2) $\boldsymbol{a^3+9a^2+27a+27}$

(3) $\boldsymbol{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}$

【10】 ※ 717－012－010

次の式を展開せよ。

(1) $(x+y+z)(x-y-z)$

(2) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+3)$

(3) $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)$

(4) $(p+2q)^2(p-2q)^2$

(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

(6) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

(1) $y+z=A$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}\\ &= (x+A)(x-A)\\ &= x^2-A^2\\ &= x^2-(y+z)^2\\ &= x^2-(y^2+2yz+z^2)\\ &= \boldsymbol{x^2-y^2-2yz-z^2}\end{aligned}$$

(2) $x^2+3x=A$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (A-2)(A+3)\\ &= A^2+A-6\\ &= (x^2+3x)^2+(x^2+3x)-6\\ &= x^4+6x^3+9x^2+x^2+3x-6\\ &= \boldsymbol{x^4+6x^3+10x^2+3x-6}\end{aligned}$$

(3) 1 番目と 3 番目を先にかけると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{(x+y)(x-y)\}(x^2+y^2)\\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)\\ &= \boldsymbol{x^4-y^4}\end{aligned}$$

(4) $A^2B^2=(AB)^2$ であることを利用する。

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{(p+2q)(p-2q)\}^2\\ &= (p^2-4q^2)^2\\ &= \boldsymbol{p^4-8p^2q^2+16q^4}\end{aligned}$$

(5) 1 番目と 4 番目，2 番目と 3 番目を先にかけると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-1)(x-4)(x-2)(x-3)\\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)\end{aligned}$$

ここで，$x^2-5x=A$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (A+4)(A+6)\\ &= A^2+10A+24\\ &= (x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24\\ &= x^4-10x^3+25x^2\\ &\qquad +10x^2-50x+24\\ &= \boldsymbol{x^4-10x^3+35x^2}\\ &\qquad \boldsymbol{-50x+24}\end{aligned}$$

(6) 3 次式の「因数分解の公式」を展開に応用したもの。

1 番目と 3 番目，2 番目と 4 番目をかける。

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{(x+1)(x^2-x+1)\}\\ &\qquad \times\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\\ &= (x^3+1)(x^3-8)\\ &= \boldsymbol{x^6-7x^3-8}\end{aligned}$$

【11】 ※ 717－012－011

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-27　(2) $64a^3+125b^3$　(3) $8a^3+27b^3$
(4) $64x^3-1$

(1) $\boldsymbol{(x-3)(x^2+3x+9)}$　(2) $\boldsymbol{(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2)}$
(3) $\boldsymbol{(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)}$　(4) $\boldsymbol{(4x-1)(16x^2+4x+1)}$

【12】 ※ 717－012－012

次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+3x+1$　(2) $4x^2-15x+9$　(3) $6x^2-5x-6$
(4) $3x^2-2xy-y^2$　(5) $3a^2-14ab+8b^2$　(6) $4x^2+7ax-2a^2$

(1) $\boldsymbol{(2x+1)(x+1)}$　(2) $\boldsymbol{(4x-3)(x-3)}$　(3) $\boldsymbol{(2x-3)(3x+2)}$
(4) $\boldsymbol{(3x+y)(x-y)}$　(5) $\boldsymbol{(3a-2b)(a-4b)}$　(6) $\boldsymbol{(4x-a)(x+2a)}$

【13】 ※ 717－012－013

次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$　(2) x^2-y^2+4y-4
(3) x^4-10x^2+9　(4) $x^3+6x^2+12x+8$
(5) x^3+x^2-4x-4

(1) $x-1=A$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=2A^2-11A+15\\&=(2A-5)(A-3)\\&=\{2(x-1)-5\}\{(x-1)-3\}\\&=\boldsymbol{(2x-7)(x-4)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=x^2-(y^2-4y+4)\\&=x^2-(y-2)^2\\&=\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}\\&=\boldsymbol{(x+y-2)(x-y+2)}\end{aligned}$$

(3) $x^2=X$ とすると，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=X^2-10X+9\\&=(X-9)(X-1)\\&=(x^2-9)(x^2-1)\\&=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3\\&=\boldsymbol{(x+2)^3}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=x^2(x+1)-4(x+1)\\&=(x^2-4)(x+1)\\&=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

【14】 ※ 717－012－014

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$　(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$
(3) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(1) $x^2+x=A$ とすると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (A-5)(A-7)+1\\ &= A^2-12A+36\\ &= (A-6)^2\\ &= (x^2+x-6)^2\\ &= \{(x+3)(x-2)\}^2\\ &= \boldsymbol{(x+3)^2(x-2)^2}\end{aligned}$$

(2) 1 番目と 4 番目, 2 番目と 3 番目を先にかけると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24\\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24\end{aligned}$$

ここで, $x^2+5x=A$ とすると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (A+4)(A+6)-24\\ &= (A^2+10A+24)-24\\ &= A^2+10A\\ &= A(A+10)\\ &= (x^2+5x)\{(x^2+5x)+10\}\\ &= \boldsymbol{x(x+5)(x^2+5x+10)}\end{aligned}$$

(3) $x+y=A$, $x-y=B$ とすると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= A^4-B^4\\ &= (A^2-B^2)(A^2+B^2)\\ &= (A+B)(A-B)(A^2+B^2)\\ &= 2x\cdot 2y\cdot\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\\ &= 4xy(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2)\\ &= 4xy(2x^2+2y^2)\\ &= \boldsymbol{8xy(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

【15】 ※ 717-012-015

次の式を因数分解せよ。

(1) $9b^2+3ab-2a-4$

(2) $x^3-x^2y-xz^2+yz^2$

(3) $1+2ab+a+2b$

(1) a で整理すると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (3b-2)a+9b^2-4\\ &= (3b-2)a+(3b+2)(3b-2)\\ &= \boldsymbol{(3b-2)(a+3b+2)}\end{aligned}$$

(2) y で整理すると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (-x^2+z^2)y+x^3-xz^2\\ &= -(x^2-z^2)y+x(x^2-z^2)\\ &= (x^2-z^2)(x-y)\\ &= \boldsymbol{(x+z)(x-z)(x-y)}\end{aligned}$$

(3) a で整理すると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (2b+1)a+2b+1\\ &= \boldsymbol{(2b+1)(a+1)}\end{aligned}$$

【16】 ※ 717-012-016

次の式を因数分解せよ。

(1) $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

(2) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ を利用する。

(1)　$y-z=a$，$z-x=b$，$x-y=c$ とすると，

$$a+b+c=(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$$

よって，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=3abc\\&=\mathbf{3(y-z)(z-x)(x-y)}\end{aligned}$$

(2)　$x-z=a$，$y-z=b$，$-(x+y-2z)=c$ とすると，

$$a+b+c=(x-z)+(y-z)-(x+y-2z)=0$$

なので，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=3abc\\&=\mathbf{-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)}\end{aligned}$$

Section 2　実数

【17】 ※ 717－012－017

次の式を簡単にせよ。

(1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{48}+\sqrt{147}$　　(2) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(1)　$(\text{与式})=4\sqrt{3}-12\sqrt{3}+7\sqrt{3}$

$$=\mathbf{-\sqrt{3}}$$

(2)　$(\text{与式})=3\sqrt{6}+6-3-\sqrt{6}$

$$=\mathbf{2\sqrt{6}+3}$$

(3)　分母と分子に $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ をかけて，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{5-2\sqrt{6}}{3-2}\\&=\mathbf{5-2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(4)　分母と分子に $\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}$ をかけて，

(与式)

$$\begin{aligned}&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right\}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right\}}\\&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3}\\&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)-3}\\&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\&=\mathbf{\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}\end{aligned}$$

【18】 ※ 717－012－018

次の数の大小を調べよ。

(1) $5\sqrt{7}$，13　　(2) $3+\sqrt{20}$，$\sqrt{56}$

(1) $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$，$13 = \sqrt{169}$ である。

よって，$\mathbf{5\sqrt{7} > 13}$

(2) 2 式の平方の差を考える。

$$\left(3+\sqrt{20}\right)^2 - \left(\sqrt{56}\right)^2$$
$$= \left(29 + 6\sqrt{20}\right) - 56$$
$$= 6\sqrt{20} - 27$$
$$= 3\left(2\sqrt{20} - 9\right)$$

ここで，$2\sqrt{20} = \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$ より，平方の差は負となる。

以上から，

$$\mathbf{\sqrt{56} > 3 + \sqrt{20}}$$

【19】 717－012－019

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}$　(2) $0.\dot{1}\dot{2}$　(3) $0.\dot{6}4\dot{8}$　(4) $6.\dot{5}\dot{4}$

(1) $x = 0.11111\cdots$ とする。

$$\begin{array}{rr} 10x = & 1.11111\cdots \\ +)\quad x = & 0.11111\cdots \\ \hline 9x = & 1 \end{array}$$

$\therefore\ x = \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

(2) $x = 0.121212\cdots$ とする。

$$\begin{array}{rr} 100x = & 12.121212\cdots \\ +)\quad x = & 0.1212\cdots \\ \hline 99x = & 12 \end{array}$$

$\therefore\ x = \dfrac{12}{99} = \mathbf{\dfrac{4}{33}}$

(3) $x = 0.648648\cdots$ とする。

$$\begin{array}{rr} 1000x = & 648.648648\cdots \\ +)\quad x = & 0.648648\cdots \\ \hline 999x = & 648 \end{array}$$

$\therefore\ x = \dfrac{648}{999} = \mathbf{\dfrac{24}{37}}$

(4) $x = 6.545454\cdots$ とする。

$$\begin{array}{rr} 100x = & 654.5454\cdots \\ +)\quad x = & 6.5454\cdots \\ \hline 99x = & 648 \end{array}$$

$\therefore\ x = \dfrac{648}{99} = \mathbf{\dfrac{72}{11}}$

Section 3　式の値，解と係数の関係

【20】 717－012－020

$x = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2

(4) x^3+y^3　(5) x^4+y^4　(6) x^5+y^5

(1)
$$x+y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{10}{3-2}$$
$$= \mathbf{10}$$

(2)
$$xy = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$= \mathbf{1}$$

(3)
$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$
$$= 10^2 - 2\cdot 1$$
$$= \mathbf{98}$$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=10^3-3\cdot1\cdot10$
$=\mathbf{970}$

(5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=98^2-2(xy)^2$
$=(100-2)^2-2\cdot1^2$
$=10000-400+4-2$
$=\mathbf{9602}$

(6) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$
$=98\cdot970-x^2y^2(x+y)$
$=(100-2)(1000-30)-1^2\cdot10$
$=100000-3000-2000+60-10$
$=\mathbf{95050}$

【21】 ❖ 717−012−021

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　(2) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$　(3) $\dfrac{1}{xy^3}+\dfrac{1}{x^3y}$

$$x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{8}{3-1}$$
$$=4$$

$$xy=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$$

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{1}=\mathbf{4}$

(2) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^2}$
$=\dfrac{4^2-2\cdot1}{1^2}$
$=\mathbf{14}$

(3) $\dfrac{1}{xy^3}+\dfrac{1}{x^3y}=\dfrac{x^2+y^2}{x^3y^3}$
$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^3}$
$=\dfrac{4^2-2\cdot1}{1^3}$
$=\mathbf{14}$

〈別解〉

$xy=1$ より，

$$\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}=\frac{1}{xy\cdot y^2}+\frac{1}{xy\cdot x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$

とすると，(2) と同じ問題になる。

【22】 ❖ 717−012−022

2 次方程式 $x^2+4x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(4) $\alpha^3+\beta^3$

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{1}=-4,\ \alpha\beta=\frac{-3}{1}=-3$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-4)^2-2\cdot(-3)$
$=\mathbf{22}$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-3)\cdot(-4)$
$=\mathbf{12}$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-4}{-3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\cdot(-3)\cdot(-4)$
$=\mathbf{-100}$

【23】 717-012-023

$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$　(4) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

すべての式が，x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式となっている。

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{3+\sqrt{5}}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\&=3\end{aligned}$$

$$x\cdot\frac{1}{x}=1$$

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}$
$=3^2-2$
$=\mathbf{7}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\cdot3$
$=\mathbf{18}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$
$=7^2-2$
$=\mathbf{47}$

(4) $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$
$-x^2\cdot\dfrac{1}{x^3}-x^3\cdot\dfrac{1}{x^2}$
$=7\cdot18-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=126-3$
$=\mathbf{123}$

【24】 717-012-024

$x+y+z=-2,\ xy+yz+zx=-4,\ xyz=1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

(4) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$

(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=(-2)^2-2(-4)$
$=4+8$
$=\mathbf{12}$

(2) $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=-2\cdot\{12-(-4)\}+3\cdot 1$
$=-2\cdot 16+3$
$=\mathbf{-29}$

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{yz+zx+xy}{xyz}$
$=\dfrac{-4}{1}$
$=\mathbf{-4}$

(4) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}$
$=\dfrac{(yz+zx+xy)^2-2(yz^2x+zx^2y+xy^2z)}{(xyz)^2}$
$=\dfrac{(-4)^2-2xyz(x+y+z)}{1^2}$
$=16-2\cdot 1\cdot(-2)$
$=\mathbf{20}$

【25】 ❖ 717−012−025

2次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解を α，β とするとき，次の2つの数を解とする2次方程式を1つ求めよ。ただし，係数はすべて整数とする。

(1) $-\alpha$，$-\beta$　　(2) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$　　(3) $2\alpha+1$，$2\beta+1$

解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

(1) 求める方程式は，

$x^2-\{(-\alpha)+(-\beta)\}x$
$+(-\alpha)(-\beta)=0$

$\Leftrightarrow\ x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2+4x+1=0}$

(2) 求める方程式は，

$x^2-\{(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}x$
$+(\alpha+\beta)\alpha\beta=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-(4+1)x+4\cdot 1=0$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2-5x+4=0}$

(3) 求める方程式は，

$x^2-\{(2\alpha+1)+(2\beta+1)\}x$
$+(2\alpha+1)(2\beta+1)=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-\{2(\alpha+\beta)+2\}x$
$+\{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1\}=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-(2\cdot 4+2)x$
$+(4\cdot 1+2\cdot 4+1)=0$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2-10x+13=0}$

Section 4　1次不等式

【26】 ※ 717－012－026

$1 < x < 2$，$-3 < y < -2$ であるとき，次の式の値の範囲を求めよ。

(1) $3x-2$　　(2) $3x+y$　　(3) $3x-y$　　(4) $\dfrac{1}{x}$

$1 < x < 2$ …… ①，$-3 < y < -2$ …… ② とする。

(1) ① の各辺に 3 をかけて，

$3 < 3x < 6$ …… ③

③ の各辺から 2 を引いて，

$$\boldsymbol{1 < 3x-2 < 4}$$

(2) ② と ③ の各辺を加えて，

$$\boldsymbol{0 < 3x+y < 4}$$

(3) ② の各辺に -1 をかけて，$2 < -y < 3$ を得る。これに ③ の各辺を加えて，

$$\boldsymbol{5 < 3x-y < 9}$$

(4) ① の逆数をとって，

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1}$$

【27】 ※ 717－012－027

次の不等式を解け。

(1) $5x-3 < 2x+9$　　(2) $4(2x-2) \leqq -(x-1)$

(3) $\dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x-1}{2}$　　(4) $0.3x-2 \geqq 0.5x+0.4$

(1) 移項して，

$$\begin{aligned} & 5x-2x < 9+3 \\ \Leftrightarrow\ & 3x < 12 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x < 4} \end{aligned}$$

(2) 両辺を展開して，

$$\begin{aligned} & 8x-8 \leqq -x+1 \\ \Leftrightarrow\ & 8x+x \leqq 1+8 \\ \Leftrightarrow\ & 9x \leqq 9 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x \leqq 1} \end{aligned}$$

(3) 両辺を 6 倍して，

$$2(x+2) < 3(x-1)$$

両辺を展開して，

$$\begin{aligned} & 2x+4 < 3x-3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x-3x < -3-4 \\ \Leftrightarrow\ & -x < -7 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x > 7} \end{aligned}$$

(4) 両辺を 10 倍して，

$$\begin{aligned} & 3x-20 \geqq 5x+4 \\ \Leftrightarrow\ & 3x-5x \geqq 4+20 \\ \Leftrightarrow\ & -2x \geqq 24 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x \leqq -12} \end{aligned}$$

【28】 ※ 717－012－028

2 つの正の数 x，y を小数第 1 位で四捨五入すると，それぞれ 6，4 になるという。このとき，$3x-2y$ の値の範囲を求めよ。

問題文の条件より，

$5.5 \leqq x < 6.5$ ……①

$3.5 \leqq y < 4.5$ ……②

が成立する。

①の各辺を3倍して，

$16.5 \leqq 3x < 19.5$ ……③

②の各辺を -2 倍して，

$-7 \geqq -2y > -9$

$\Leftrightarrow$ $-9 < -2y \leqq -7$ ……④

③，④の各辺を加えて整理して，

$\boldsymbol{7.5 < 3x - 2y < 12.5}$

【29】 717－012－029

次の不等式を解け。

(1) $|2x-11| < 5$　　(2) $|x-1| < -2x$　　(3) $3-2|x| > |x-1|$

(1) $|2x-11| < 5$ から，

$-5 < 2x - 11 < 5$

よって，

$6 < 2x < 16$

両辺を2で割って，

$\boldsymbol{3 < x < 8}$

(2) $|x-1| < -2x$ において，$|x-1| \geqq 0$ であるから，

$-2x > 0$　　$\therefore$　$x < 0$

$x < 0$ のとき，$x - 1 < 0$ より，

$-(x-1) < -2x$　　$\therefore$　$\boldsymbol{x < -1}$

(3) $3-2|x| > |x-1|$ ……①とする。

(i) $1 \leqq x$ のとき

①は $3-2x > x-1$ すなわち $3x < 4$

よって，

$x < \dfrac{4}{3}$　　$\therefore$　$1 \leqq x < \dfrac{4}{3}$

(ii) $0 \leqq x < 1$ のとき

①は $3-2x > 1-x$ すなわち $x < 2$

よって，

$0 \leqq x < 1$

(iii) $x < 0$ のとき

①は $3+2x > 1-x$ すなわち $3x > -2$

よって，

$-\dfrac{2}{3} < x$　　$\therefore$　$-\dfrac{2}{3} < x < 0$

以上より，

$\boldsymbol{-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{4}{3}}$

【30】 717－012－030

次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 2(x+2) < 5x + \dfrac{x-3}{2} \\ \dfrac{x-2}{5} \geqq \dfrac{x-4}{2} \end{cases}$

(2) $\dfrac{5(x-1)}{2} \leqq 2(2x+1) < \dfrac{7(x-1)}{4}$

(1) 与式

$\begin{cases} 2(x+2) < 5x + \dfrac{x-3}{2} & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x-2}{5} \geqq \dfrac{x-4}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

について，①の両辺に2をかけて，

$4(x+2) < 10x + (x-3)$

これを整理して，$x > \dfrac{11}{7}$ ……③

②の両辺に10をかけて，

$2(x-2) \geqq 5(x-4)$

これを整理して，$x \leqq \dfrac{16}{3}$ ……④

③，④より，$\boldsymbol{\dfrac{11}{7} < x \leqq \dfrac{16}{3}}$

(2) $\dfrac{5(x-1)}{2} \leqq 2(2x+1)$ から，

$$5(x-1) \leqq 4(2x+1)$$

これを整理して，$x \geqq -3$ …… ①

同様に，$2(2x+1) < \dfrac{7(x-1)}{4}$ から，

$$8(2x+1) < 7(x-1)$$

これを整理して，$x < -\dfrac{5}{3}$ …… ②

①，② より，$\boldsymbol{-3 \leqq x < -\dfrac{5}{3}}$

【31】 ❖ 717－012－031

家から 1500m 離れた駅まで，はじめは分速 80m で歩き，途中から分速 140m で走って行くことにする。家を出てから 15 分以内に駅に着くようにするためには，走る道のりを何 m 以上にしなければならないか。

走る道のりを x m とすると，歩く道のりは x を用いて，$(1500-x)$ m と表せる。

条件から，

$$\frac{1500-x}{80} + \frac{x}{140} \leqq 15$$

が成り立つので，これを整理して，

$$x \geqq 700$$

を得る。

したがって，走る道のりは **700m** 以上である。

【32】 ❖ 717－012－032

二つの円 O，O′ がある。円 O の半径を r とし，円 O′ の円周の長さは円 O の円周の長さより 20 だけ長いとする。

円 O′ の半径は $r + \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\pi}$ である。円 O′ の面積が円 O の面積の 2 倍以上であり，かつ 3 倍以下であるような r の値の範囲は，

$$\frac{\boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\pi} \leqq r \leqq \frac{\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\pi}$$

である。

$\boxed{\text{アイ}}$ **: 10**，$\boxed{\text{ウ}}$ **: 5**

$\boxed{\text{エ}}$ **: 5**，$\boxed{\text{オ}}$ **: 3**

$\boxed{\text{カキ}}$ **: 10**，$\boxed{\text{クケ}}$ **: 10**

$\boxed{\text{コ}}$ **: 2**

円 O′ の半径を r' とすると，円周の長さについて，$2\pi r' = 2\pi r + 20$

よって，$r' = r + \dfrac{10}{\pi}$

また，面積について，

$$2 \cdot \pi r^2 \leqq \pi r'^2 \leqq 3 \cdot \pi r^2$$

よって，$2r^2 \leqq r'^2 \leqq 3r^2$

$r > 0$，$r' > 0$ より，$\sqrt{2}\,r \leqq r' \leqq \sqrt{3}\,r$ なので，

$$\sqrt{2}\,r \leqq r + \frac{10}{\pi} \leqq \sqrt{3}\,r$$

$\sqrt{2}\,r \leqq r + \dfrac{10}{\pi}$ を解くと，$r \leqq \dfrac{10}{(\sqrt{2}-1)\pi}$

なので，

$$r \leqq \frac{10+10\sqrt{2}}{\pi}$$

$r + \dfrac{10}{\pi} \leqq \sqrt{3}\,r$ を解くと，$r \geqq \dfrac{10}{(\sqrt{3}-1)\pi}$

なので，

$$r \geqq \frac{5+5\sqrt{3}}{\pi}$$

以上をまとめて，

$$\frac{5+5\sqrt{3}}{\pi} \leqq r \leqq \frac{10+10\sqrt{2}}{\pi}$$

【33】 ※ 717– 012 – 033

2 つの不等式

$$3x+5>5x-1 \quad \cdots\cdots ①,\ 5x+2a>4-x \quad \cdots\cdots ②$$

がある。ただし，a を定数とする。

(1) 不等式 ① を解け。

(2) 2 つの不等式 ①，② を同時に満たす整数が存在し，かつそれが自然数のみになるとき，a の値の範囲を求めよ。

(1) ① から，$2x<6$ なので，$\boldsymbol{x<3}$

(2) ② から，

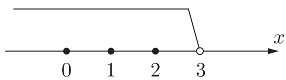
$$6x>-2a+4$$

これを整理して，

$$x>\frac{-a+2}{3}$$

①，② を同時に満たす整数が存在し，かつそれが自然数のみになる条件は，

$$0 \leqq \frac{-a+2}{3}<2$$



よって，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-4<a \leqq 2}$$

【34】 ※ 717– 012 – 034

不等式 $\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<18 \cdots\cdots$ ① について，次の問いに答えよ。

(1) ① を満たす整数 x の個数を求めよ。

(2) 正の数 a に対して，不等式 $\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<a \cdots\cdots$ ② を満たす整数 x の個数が 4 であるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) ① の絶対値を外すと，

$$-18<x-\frac{2}{7}<18$$

$$\therefore\quad -\frac{124}{7}<x<\frac{128}{7}$$

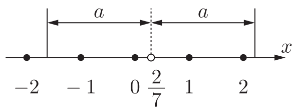
よって，整数解は $x=-17,\ -16,\ \ldots,\ 17,\ 18$ の **36** 個。

(2) ② を解くと，

$$-a+\frac{2}{7}<x<a+\frac{2}{7}$$

となり，これを満たす整数 x の個数が 4 であるとき，その整数解は，$\dfrac{2}{7}$ からの距離が近い順に，0，1，−1，2 である。

5 番目に近い整数は −2 であるから，2 が不等式の解に含まれ，かつ −2 が不等式の解に含まれないような a の値の範囲を求めればよい。



よって，

$$a+\frac{2}{7}>2 \quad かつ \quad -a+\frac{2}{7} \geqq -2$$

これを解いて，

$$\boldsymbol{\frac{12}{7}<a \leqq \frac{16}{7}}$$

Section 5　集合

【35】 717－012－035

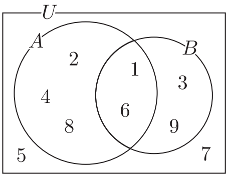
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする。集合 U の部分集合 A, B を,

$A=\{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 6, 9\}$

とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{A}\cap B$　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$

(5) $\overline{A\cap B}$　(6) $\overline{A\cup B}$



(1) $\overline{A}=$ **$\{3, 5, 7, 9\}$**

(2) $\overline{A}\cap B=$ **$\{3, 9\}$**

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=$ **$\{5, 7\}$**

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=$ **$\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$**

(5) $\overline{A\cap B}=$ **$\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$**

(6) $\overline{A\cup B}=$ **$\{5, 7\}$**

【36】 717－012－036

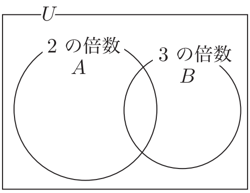
100 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1) 6 の倍数

(2) 2 または 3 の倍数

(3) 2 で割り切れるが 3 で割り切れない整数

(4) 2 と 3 の少なくとも一方で割り切れない整数



以下，割り算の余りは切り捨てて考える。

(1)　1 から 200 までの整数のうち，6 の倍数となる数は，$200\div6=33$（個）

また，1 から 99 までの整数のうち，6 の倍数となる数は，$99\div6=16$（個）

よって，100 から 200 までの整数のうち，6 の倍数となる数は，$33-16=$ **17**（個）

(2)　100 から 200 までの整数の集合を U とし，U のうち，2 の倍数となる数の集合を A，3 の倍数となる数の集合を B とする。

$200\div2=100$，$99\div2=49$ より，$n(A)=100-49=51$

$200\div3=66$，$99\div3=33$ より，$n(B)=66-33=33$

また，$A\cap B$ の個数は，6 の倍数の個数であるので，$n(A\cap B)=17$

よって求める個数は，

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=51+33-17\\&=\mathbf{67}\text{（個）}\end{aligned}$$

(3)　求める個数は，

$$\begin{aligned}n(A\cap\overline{B})&=n(A)-n(A\cap B)\\&=51-17\\&=\mathbf{34}\text{（個）}\end{aligned}$$

(4)　U の要素のうち，2 で割り切れない，または 3 で割り切れない数を考えればよい。

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cup\overline{B})&=n(\overline{A\cap B})\\&=n(U)-n(A\cap B)\\&=101-17\\&=\mathbf{84}\text{（個）}\end{aligned}$$

【37】 ※717－012－037

1 から 100 までの整数のうち，21 と互いに素であるものの個数を求めよ。

$21=3\times7$ であるから，求める整数の個数とは，1 から 100 までの整数のうち，3 でも 7 でも割り切れない整数の個数である。

1 から 100 までの整数の集合を U，U のうち 3 で割り切れる数の集合を A，7 で割り切れる数の集合を B とすると，求める個数は，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ である。

以下，割り算の余りは切り捨てて考える。

$n(A)=100\div3=33$, $n(B)=100\div7=14$, $n(A\cap B)=100\div21=4$ なので，

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B) \\ &= n(U)-\{n(A)+n(B) \\ &\qquad -n(A\cap B)\} \\ &= 100-(33+14-4) \\ &= \mathbf{57}\ (\text{個}) \end{aligned}$$

Section 6　命題と条件

【38】 ※717－012－038

x は実数とする。このとき，次の空欄の中に適切なものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(1) $x=2$ は $x^2=2x$ であるための $\boxed{\text{ア}}$。

(2) $x>0$ は $x\neq1$ であるための $\boxed{\text{イ}}$。

(3) 2 つの三角形の面積が等しいことは，2 つの三角形が合同であるための $\boxed{\text{ウ}}$。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ であることは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形であるための $\boxed{\text{エ}}$。

$\boxed{\text{ア}}$：②，$\boxed{\text{イ}}$：③

$\boxed{\text{ウ}}$：①，$\boxed{\text{エ}}$：⓪

(1) $p:x=2$，$q:x^2=2x$ とする。

$p\Rightarrow q$ は真であるが，$q\Rightarrow p$ は偽である。

なぜなら，条件 q を満たす x は $x=0, 2$ であるため，反例として $x=0$ が存在する。

よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件でないので，②

(2) $p:x>0$，$q:x\neq1$ とする。

$p\Rightarrow q$ は偽であり，$q\Rightarrow p$ も偽である。

なぜなら，$p\Rightarrow q$ の反例として $x=1$ が存在し，$q\Rightarrow p$ は反例として $x=-1$ などが存在するため。

よって，p は q であるための必要条件でも十分条件でもないので，③

(3) p：2 つの三角形の面積が等しい，q：2 つの三角形が合同である，とする。

$p\Rightarrow q$ は偽であり，$q\Rightarrow p$ は真である。

よって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でないので，①

(4) $p:\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$，$q:\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形である，とする。

$p\Rightarrow q$ は真であり，$q\Rightarrow p$ も真である。

よって，p は q であるための必要十分条件であるので，⓪

【39】 ※717－012－039

実数 a に関する条件 p，q，r を次のように定める。

$p : a^2 \geqq 2a+8$

$q : a \leqq -2$ または $a \geqq 4$

$r : a \geqq 5$

(1) q は p であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 命題「p ならば $\boxed{\text{イ}}$ 」は真である。また，命題「 $\boxed{\text{ウ}}$ ならば p」は真である。下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ q かつ $\overline{r}$　　① q または $\overline{r}$
② $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$　　③ $\overline{q}$ または $\overline{r}$

$\boxed{\text{ア}}$ ：⓪，$\boxed{\text{イ}}$ ：①
$\boxed{\text{ウ}}$ ：⓪

(1) $p : a^2 \geqq 2a+8 \iff a^2-2a-8 \geqq 0$
$\iff (a+2)(a-4) \geqq 0$
$\iff a \leqq -2$ または $4 \leqq a$

これは条件 q と同じである。

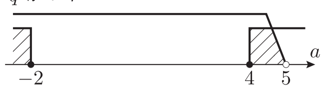
よって，q は p であるための必要十分条件であるので，$\boxed{\text{ア}}$ に入るのは，⓪

(2) 条件 $q : a \leqq -2$ または $a \geqq 4$ の否定 $\overline{q}$ は $-2 < a < 4$ である。

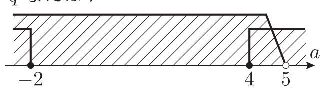
一方，条件 $r : a \geqq 5$ の否定 $\overline{r}$ は $a < 5$ となる。

よって，⓪～③ が表す範囲を数直線で表すと，次図のようになる。

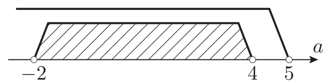
⓪ q かつ $\overline{r}$



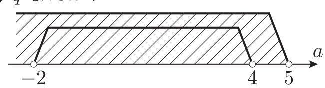
① q または $\overline{r}$



② $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$



③ $\overline{q}$ または $\overline{r}$



$\boxed{\text{イ}}$ について

命題「p ならば $\boxed{\text{イ}}$ 」が真であるから，p が表す範囲 ($a \leqq -2$，$4 \leqq a$) は $\boxed{\text{イ}}$ が表す範囲に含まれる。よって，$\boxed{\text{イ}}$ に入るのは，①

$\boxed{\text{ウ}}$ について

命題「 $\boxed{\text{ウ}}$ ならば p」が真であるから，$\boxed{\text{ウ}}$ が表す範囲は p が表す範囲に含まれる。よって，$\boxed{\text{ウ}}$ に入るのは，⓪

Section 7　命題と証明

【40】 ※ 717－012－040

右のような 4 枚のカードがあり，文字の裏には数字がかいてあることがわかっている。

A　K　13　48

「母音の裏は必ず奇数である」

という仮説が正しいかどうかを確認するには，最低限どのカードをめくって確認する必要があるか。

「母音であるならば奇数である」の対偶をとると，「偶数であるならば子音である」となる。

したがって，A のカードは，裏が奇数になっているか確かめる必要があるので，めくる必要がある。

また，48 のカードも，裏が子音になっているか確かめる必要がある。（もし，48 のカードの裏が母音だった場合，「母音の裏が偶数」となってしまうので仮説が正しくないことになる。K や 13 の裏がどんなカードであっても仮説は正しいことがいえる）

よって，めくるカードは **A と 48** である。

【41】 ※ 717－012－041

x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆と対偶を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1) $x=0 \Rightarrow xy=0$　　(2) $xy>0 \Rightarrow x>0$ かつ $y>0$

(1)　与えられた命題

$$x=0 \Rightarrow xy=0$$

は**真**である。

命題の逆

$$xy=0 \Rightarrow x=0$$

は**偽**であり（反例：$x=1$，$y=0$），対偶

$$xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

は**真**である。

(2)　与えられた命題

$$xy>0 \Rightarrow x>0 \text{ かつ } y>0$$

は**偽**である。（反例：$x=-1$，$y=-1$）

命題の逆

$$x>0 \text{ かつ } y>0 \Rightarrow xy>0$$

は**真**であり，対偶

$$x \leqq 0 \text{ または } y \leqq 0 \Rightarrow xy \leqq 0$$

は**偽**である。（反例：$x=-1$，$y=-1$）

【42】 ※ 717－012－042

整数 a, b, c に関する次の命題 P を考える。

P：「$a^2+b^2+c^2$ が偶数になるならば，

a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である」

命題 P の真偽を判定せよ。（真であれば証明を，偽であれば反例を示せ）

命題 P の対偶は，「a, b, c のすべてが奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である。」であるが，a, b, c が奇数ならば，a^2, b^2, c^2 も奇数である。よって，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である。

したがって，対偶が真であるから，命題 P も**真**である。

【43】 ※717－012－043

自然数 n に関する条件 $p,\ q,\ r,\ s$ を次のように定める。

p：n は 5 で割ると 1 余る数である

q：n は 10 で割ると 1 余る数である

r：n は奇数である

s：n は 2 より大きい素数である

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す。

(1) 下の空欄にあてはまる言葉を下の⓪ ～ ③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

「p かつ r」は q であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

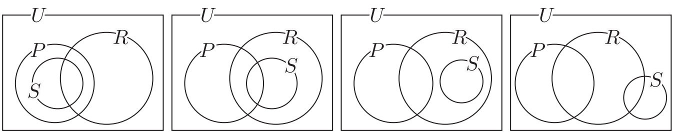
「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 自然数全体の集合を全体集合 U とし，条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，$P,\ R,\ S$ の関係を表す図は $\boxed{\text{エ}}$ である。

空欄にあてはまる図を下の④ ～ ⑦のうちから一つ選べ。

④ ⑤ ⑥ ⑦



$\boxed{\text{ア}}$ ：⓪， $\boxed{\text{イ}}$ ：②， $\boxed{\text{ウ}}$ ：⓪， $\boxed{\text{エ}}$ ：⑤

(1) $\boxed{\text{ア}}$ について

条件 p より，$n=5l+1$（l は 0 以上の整数）とおける。また，条件 r より，$n=2m+1$（m は 0 以上の整数）とおける。

$5l+1=2m+1$ とすると $5l=2m$ であり，2 と 5 は互いに素であるから，l は 2 の倍数，すなわち偶数である。ゆえに，$n=5\cdot 2k+1=10k+1$（k は 0 以上の整数）とおける。

よって，n は条件 q を満たす。これより，命題「p かつ r」$\Rightarrow q$ は真である。

次に，逆の真偽を調べる。

条件 q より，$n=10k+1$（k は 0 以上の整数）とおける。

$n=10k+1=5\cdot 2k+1$ であるから，n は条件 p を満たす。また，$n=10k+1=2\cdot 5k+1$ であるから，n は条件 r も満たす。

よって，命題 $q\Rightarrow$「p かつ r」も真である。

ゆえに，「p かつ r」は q であるための必要十分条件である。よって ⓪

$\boxed{\text{イ}}$ について

2 より大きい素数はすべて奇数である。よって，命題 $s \Rightarrow r$ は真である。

一方，命題 $r \Rightarrow s$ は偽である。(反例：$n = 9$)

それぞれの命題の対偶を考えると，命題 $\overline{r} \Rightarrow \overline{s}$ は真，　命題 $\overline{s} \Rightarrow \overline{r}$ は偽となる。

したがって，$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。よって ②

$\boxed{\text{ウ}}$ について

2 より大きい素数は奇数であるから，$\boxed{\text{ア}}$ より，

「p かつ s」$\Leftrightarrow$ n は 5 で割ると 1 余り，かつ 2 より大きい素数

$\Leftrightarrow$ n は 10 で割ると 1 余り，かつ 2 より大きい素数

$\Leftrightarrow$「q かつ s」

したがって，「p かつ s」は「q かつ s」であるための必要十分条件である。よって ⓪

(2) $\boxed{\text{エ}}$ について

集合 P, R, S について，

$P = \{n \mid n$ は 5 で割ると 1 余る数$\}$

$R = \{n \mid n$ は奇数$\}$

$S = \{n \mid n$ は 2 より大きい素数$\}$

である。

2 より大きい素数はすべて奇数であるから，$R \supset S$ が成り立つ。また，$n = 11$ は 5 で割ると 1 余る素数であるから，P と S は共通部分をもつ。

よって，P, R, S の関係を表す図は ⑤ である。