はじめに

※ 737– 000 – 001

数学のトリセツⅢをお手にとってくださり，ありがとうございます。数学Ⅲの学習をはじめるすべての方に対して，自信をもっておススメできる参考書＋問題集を作りました。「数学Ⅲは難しい」という声を，迫田はこれまで幾度となく聞いてきました。そしてその声は「文系か理系か」の選択を迫られた高校生にも広まり「数学Ⅲがあるから理系には進まない！」と考える受験生を多く生み出してしまいました。

しかし，断言します。数学Ⅲは難しくありません！ たしかに数学的には数学ⅠA/ⅡBより高度な内容であることは間違いありません。ただ，より数学の面白さを体感できるのも数学Ⅲです。そして，正しく学習すれば，数学Ⅲはちゃんと点数が取れるようになります。

「数学Ⅲは難しい」と感じさせている原因が，複雑な計算と抽象的な概念の理解です。前者は体系的に学習をすることで解決でき，後者はトリセツの最大の特徴である動画解説で解決できるでしょう。はじめて数学Ⅲの学習をする人，既に数学Ⅲの学習を進めているが伸び悩んでいる人は，すべての動画を視聴することをおススメします。

数学Ⅲの学習もまた，基礎・基本をしっかりと確立し，原理・原則を理解することが大切になります。さらに，数学Ⅲは内容を理解するだけではテストや入試などで十分な点を取ることができません。多くの良問を解き，数学的感覚を磨いていく必要があります。確固たる基礎学力をつけるために十分な量の演習問題を用意していますので，精力的に取り組んでください。

数学のトリセツは「原理・原則を理解する」という理念の下に製作していますが，今回の数学のトリセツⅢでは，多少の不正確さや曖昧さには目を瞑り，わかりやすさや感覚的な理解を重要視しました。というのも，数学Ⅲの内容を正確に理解するには，大学以上の知識が不可欠だからです。大学数学では，たとえば極限の単元１つとっても，高校で学習する感覚的な極限の定義ではなく，より厳密な定義を学習します。正確さを求めるとキリがないので，なるべくわかりやすい形で原理・原則をかみ砕いたつもりです。

数学ができない人は，「よし，やってみよう！」→「何から始めていいかわからないから，とりあえずみんなが使っている参考書や売れている問題集に手を出す」→「でもわからない，できるようにならない」→「やる気がなくなる」という流れを辿り，テストや入試など，必要に迫られてまた振り出しに戻ります。このループを繰り返すことで「自分は数学が苦手だ，数学が嫌いだ。」という考えに至ります。これまで，やる気のある人がなぜ伸びなかったのか，原因は以下の点にあると考えています。

① 本だけ（文字だけ）の参考書や問題集には理解できない箇所が多くある。
② 必要最小限すぎて，大切な部分の説明が足りない。
③ 表現がわかりづらい。

これらを解決することを念頭に置いて，教材の開発を行いました。数学Ⅲは非常に高度な内容が多く，また学習する内容も多岐に渡ります。学習する順序が大切になりますし，覚えるべき事柄も多くあります。本書は数学の学習書として十分な機能がありますが，それでも数学をちゃんとできるようになるためには，つまり，上記の ① ～ ③ を解決するには，映像や音声の力を借りた方が何倍も効果的です。本書の最大の特徴である動画解説を活用して，効率的に数学の学習を進めていただけたら幸いです。

映像をつけるためには，多くのコストと手間がかかります。この本は，教育の世界を変えたいという熱い意志を持った仲間たちの協力によって生まれました。私たちの描く教育の未来に賛同してくださった，企業や個人が多大なる協力をしてくれたおかげで本書は生まれました。純粋な教育に対する思いが集まって，「映像をつける」という簡単なようで難しい課題を解決することができたのです。映像に関しては撮影用のスタジオを用意し，映像制作のプロに手伝ってもらいました。広告が入る無料の動画視聴サイトを利用せず，自分達でサーバーを準備し，アプリを用意しました。既存の映像講義を元にして本を作ったのではなく，本を書いてから専用の動画を撮り下ろしました。また，私の教え子たちから貴重な意見をもらい，現在も学校や予備校で数学を教えている先生たちからも意見をもらいました。

様々な「意識熱い系」の仲間たちの協力で，この本の出版に至りました。これまでにない新しい勉強の取り組みを，ぜひ体感してください。

この本をきっかけにして，数学という学問を通したサイエンスの世界の楽しさに触れてほしいと思います。そして，1 人でも多くの「数学で悩んでいる人」が救われることを心から願っています。

数学の勉強の仕方

※ 737－000－002

さて，本書を手に取り，早速取り組もうとしている人も多いかもしれませんが，ちょっと待ってください。何事も，取り組む前の準備が大切です。そもそも「数学」ってどういう学問なのか。そして，どうやったらできるようになるのか。それらを確認してから，本腰を据えて取り組んでいくことにしましょう。ぜひ動画を視聴してみてください。

数学とはコトバ

みなさんが学習している数学というのは，日本語や英語と同じ，言語の１つです。数学は物理や化学などサイエンスの世界で使われる共通言語なのです。サイエンスの世界は，何も学校で習う「理科」だけではありません。経済学や社会学などもサイエンスです。では，なぜ数学という言語をサイエンスの世界では使っているのか。それは，唯一解釈の多様性のない言語だからです。私たちが使っている自然言語は，状況に応じて解釈の違いが生まれます。「とても速いスピードで物体が横切った」という文を読んだとき，「とても速い」というのは人によって解釈が違うでしょう。数学という人工言語は，解釈の多様性がなく，文化や状況を超えて，すべての人が平等に理解できる唯一の言語なのです。ですから，正確性が必要なサイエンスの世界では数学というコトバが使われることになるのです。

さて，皆さんは言語を学習するときは，どのように学習していますか？ 英語を例にとって考えてみるとわかりやすいと思いますが，まずは単語や熟語を覚え，文法を学習し，アウトプットを繰り返していくことでしょう。数学も同じです。定義や定理・公式をしっかり覚え，問題による解き方を学習し，アウトプットを繰り返すことで，できるようになっていくのです。

英語ができない人は，まず語彙力が足りないことが多いでしょう。数学ができない人は，定義や定理・公式をしっかり覚えていないことが原因になっています。また，英文法を理解していないと英語の理解が難しいように，数学においても問題の解き方を理解していないと，当然スムーズに解くことができません。結局は，数学を学習する姿勢は英語の学習と同じです。

皆さんは，日本語をすでに習得していますね。そうであるならば，数学という言語の理解は必ずできます。しっかりとした学習の仕方を学べば，数学というのは全員が正しく扱えるようになる素晴らしい言語なのです。

数学のトリセツの取扱説明書

※ 737– 000 – 003

本書は，「Introduction」と「演習問題」に分かれています。Introduction では，その単元で扱う用語や重要事項などをまとめてあります。一読して理解があやふやなものは動画で理解を深めてください。演習問題では，その単元の重要な問題を用意してあります。すべての問題が解けるようになるまで，繰り返し取り組んでください。

また本書は，数学のトリセツⅠＡ・ⅡＢの内容を理解していることを前提に作られています。もし，動画を見ても理解が難しい場合は，数学ⅠＡ・ⅡＢからやり直すことを強くお勧めします。

トリセツの巻末解説について

トリセツのすべての演習問題には解説が付録してありますが，これらは最低限のことしか記していません。計算過程や記述も最小限に抑えています。ある程度数学ができるようになってくると，冗長な解説は不要なので，あえてそのようにしています。解説を一読し，わからないことがあれば解説動画をぜひ活用してください。

わからない箇所に関して，時間をかけて自分の力で理解をすることも，数学の力をつける意味ではとても大切です。本書に掲載している問題は「見た瞬間に解法が思い浮かぶ状態」になることが重要ですので，あまり時間をかけずに短期間で全範囲の学習を終えてほしいと思います。「巻末の解説があれば十分！」と自信を持って言えるようになれば，あなたはすでに数学Ⅲの基礎は完璧になっていると断言します。

初めて数学Ⅲを学習する人

本書を手元に置いた状態で，Introduction から動画の視聴を始めてください。専用のノートも準備をして，学校の授業のように板書をノートに取りながら講義を視聴してください。

各章の Introduction で新しく学習する単元の導入を行います。その後，演習問題に取り組んでいきましょう。解答・解説を確認して，解説の理解が曖昧な場合は，解説動画を視聴してください。

既習単元の演習をしたい人

演習問題から取り組んでみましょう。解けない問題は各章の Introduction を確認し，解答・解説を読んでみましょう。それでも理解があやふやな場合は解説動画を視聴しましょう。また，解説動画の理解が難しい場合は，各章の Introduction の動画も視聴してみてください。きっと演習問題の解説が理解できるようになるでしょう。

目次

CONTENTS

補足：授業内で使う記号と意味

記号	意味	記号	意味
$\therefore$	ゆえに	$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\because$	なぜならば	$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	$\blacksquare$	証明終了

複素数平面

1

複素数という数の概念は数学IIで学習しました。複素数平面の単元では，文字通り複素数を用いた座標平面を考えます。ざっくりいってしまえば，複素数平面はベクトルと同じようなものなのですが，ベクトルでは難しかった「回転」を扱うことができます。虚数単位 i を用いることで，平面上での回転を効率的に表すことができるとても便利なツールなのです。

虚数というのは，目で見ることのできない数であり，概念としての数です。しかし，これを用いることで数学の世界が一気に広がり，様々な場面で応用することができます。複素数平面もその１つです。

なお，複素数平面は大学以上では複素平面やガウス平面と呼ばれることがほとんどで，なぜか高校数学では複素「数」平面と呼ばれています。数学のトリセツでも，これに合わせて複素数平面と呼ぶことにします。

Section 1 複素数平面

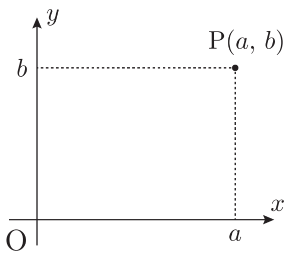
一見すると難しそうに見える複素数平面という単元ですが，その性質を活用すると数学の世界がグッと広がっていきます。以後，特に断りがない限り，$a+bi$ とかいてある場合，a, b は実数とします。

複素数平面 737–011–001

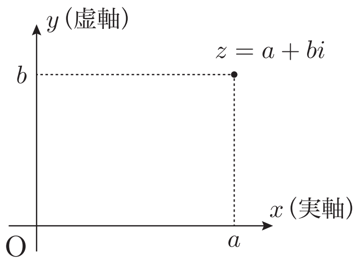
複素数 $z=a+bi$ を座標平面上の点 (a, b) に対応させて表したとき，この平面を**複素数平面**（または複素平面やガウス平面）といいます。「なんでこんなことをするのか？」という疑問は後々解決しますので，まずはその定義を覚えていきましょう。a を複素数 z の**実部**といい $\mathrm{Re}\,z$ と表します。また，b を複素数 z の**虚部**といい，$\mathrm{Im}\,z$ と表します（最近はこの表し方をする書籍が減っていますが，便利なので覚えておきましょう）。

複素数平面上では，x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**といいます。それぞれ Re，Im で表したり，単に x, y と表したりします。複素数平面上では，複素数 z を表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ や，単に「点 z」といいます。

このあたりは，位置ベクトルの表現に似ていますね。点 P を表す位置ベクトルを $\mathrm{P}\left(\overrightarrow{p}\right)$ などと表しましたが，それと同じようなイメージです。



xy 平面



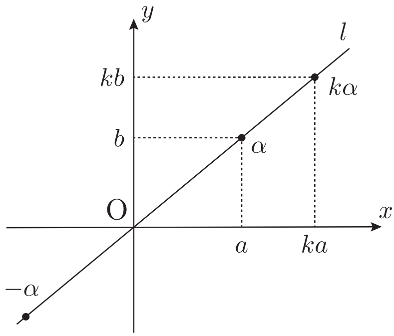
複素数平面

Ex.1 複素数平面上に，次の複素数が表す点を図示せよ。

(1) $2+3i$　(2) $3-i$　(3) $(1-i)^2$

複素数の実数倍

※ 737－011－002



複素数の実数倍について考えてみましょう。複素数 $\alpha = a + bi\ (a \neq 0)$ について，これに実数 k をかけると，

$$k\alpha = k(a + bi) = ka + kbi$$

となります。

$a > 0$，$b > 0$ であり，かつ $k > 0$ のときは，右図のように，複素数平面上で点 O と点 α を結んだ直線を l とすると，点 $k\alpha$ は直線 l 上にあることがわかります。また，点 $-\alpha$ も，図のように表せることがわかります。

これらのことから，β が $\beta \neq 0$ なる複素数であり，$k \neq 0$ のとき，以下のことがわかります。

> 3 点 O，α，β が一直線上に並ぶ $\Leftrightarrow$ $\alpha = k\beta$ となる実数 k が存在する。

複素数の加法・減法

※ 737－011－003

複素数の加法や減法について，その図形的な意味も確認しておきましょう。2 つの複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ があったとき，

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$$

は，点 α を実軸方向に $+c$，虚軸方向に $+d$ 平行移動した点を表します。

また，

$$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$$

は，点 α を実軸方向に $-c$，虚軸方向に $-d$ 平行移動した点を表します。

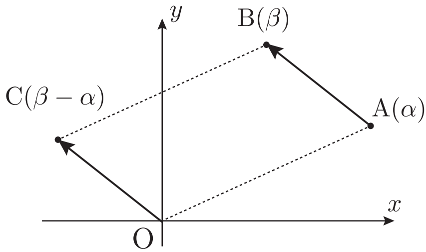
複素数の加法や減法は，点の平行移動を表しているのです。

複素数とベクトル

※ 737－011－004

ここまで紹介した複素数ですが，実はベクトルと同じような性質をもっています。

複素数 $\alpha = a + bi$ は，座標平面上の点 $(a,\ b)$ に対応させていました。同じように，ベクトルでも同じ点は $\overrightarrow{x} = (a,\ b)$ と表すことができます。では，実数倍に関してはどうでしょうか。複素数 α に実数 k をかけた場合，$k\alpha = ka + kbi$ と表すことができ，これは座標平面上の $(ka,\ kb)$ に対応しています。同様に，ベクトルの場合も $k\overrightarrow{x} = (ka,\ kb)$ となります。



さらに，2 点 A，B を複素数で A(α), B(β) と表す場合，$\beta-\alpha$ はどのような点を表すでしょうか。具体的に見てみましょう。

$$\alpha=4+2i,\ \beta=2+3i$$

とするとき，点 A，B はそれぞれ座標平面上では，

$$\mathrm{A}(4,\ 2),\ \mathrm{B}(2,\ 3)$$

に対応しています。それでは，$\beta-\alpha$ が表す点 C はどのようになるのかというと，

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=(2-4)+(3-2)i\\&=-2+i\end{aligned}$$

より，C(-2, 1) に対応していることがわかります。

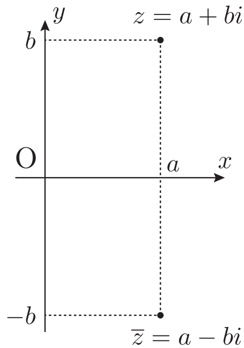
これはまさにベクトルの考え方そのものであり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となっていますね。仮に，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\beta$ というように，便宜的にベクトルを複素数で表した場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\beta-\alpha$$

となっているわけです。

このように，複素数はベクトルと同じように考えることができます。

共役複素数 　737-011-005



複素数 $z=a+bi$ に対し，$\overline{z}=a-bi$ を z の**共役複素数**といいます。z と $\overline{z}$ は実軸に対して対称になっています。またこれより，z が実数や純虚数となるとき，以下の条件が成り立ちます。

> z が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=z$
>
> z が純虚数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=-z$ かつ $z\neq 0$

これらは簡単に理解することができます。z が実数のとき，虚部 (b) は 0 となります。したがって，$z=a$，$\overline{z}=a$ となるので，$\overline{z}=z$ が成り立ちます。また，z が純虚数の場合，実部 (a) が 0 となります。したがって，$z=bi$，$\overline{z}=-bi$ となるので，$\overline{z}=-z$ が成り立つわけです。

また，共役複素数には次の性質があるので覚えておきましょう。

共役複素数の性質

$\boxed{1}$　$z+\overline{z}=$ (実数)

$\boxed{2}$　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

$\boxed{3}$　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta},\ \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\boxed{4}$　$\overline{(\overline{z})}=z$

〈証明〉

以下 $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする。

$\boxed{1}$　$z=a+bi$ とおくと，$\overline{z}=a-bi$

よって，

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$

したがって，$z+\overline{z}$ は実数。

$\boxed{2}$　$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とすると，

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}\\&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

同様に，$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ も示すことができる。

$\boxed{3}$　$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とすると，

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(a+bi)(c+di)}\\&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=a(c-di)-b(ci+d)\\&=a(c-di)-bi(c-di)\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\overline{\beta}\end{aligned}$$

また，

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\left\{ \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \right\}} \\
&= \overline{\left\{ \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \right\}} \\
&= \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{c(a-bi)+di(a-bi)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} \\
&= \frac{a-bi}{c-di} \\
&= \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}
\end{aligned}
$$

4 $z=a+bi$ とおくと，$\overline{z}=a-bi$ なので，

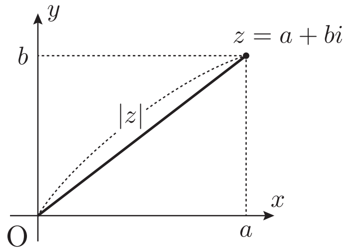
$$\overline{(\overline{z})}=\overline{a-bi}=a+bi=z$$

Ex.2 次の複素数の共役複素数を求めよ。

(1) $(2+5i)-3(1+2i)$　　(2) $(2+i)(3-2i)$

絶対値 　737-011-006

$z=a+bi$ に対し，z の絶対値 $|z|$ は，原点から点 $(a,\ b)$ までの距離を表します。したがって，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ となります。



また，

$$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

より，

$$|z|^2=z\overline{z}$$

が成り立ちます。

> $z=a+bi$ に対して，
>
> $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z|^2=z\overline{z}$

非常に重要な性質なので覚えておきましょう。また，複素数平面上での 2 点間の距離も同様に考えることができます。複素数とベクトルの項目で紹介したように，2

点 A，B を複素数で A(α), B(β) と表す場合，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\beta-\alpha$ と同じ意味でしたね。したがって，線分 AB の長さは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |\beta-\alpha|$ として考えることができます。まとめると次のようになります。

複素数と絶対値のまとめ

$\boxed{1}$　$z = a + bi$ のとき，$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{2}$　$z\overline{z} = |z|^2$

$\boxed{3}$　$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\boxed{4}$　A(α), B(β) とするとき，$\mathrm{AB} = |\beta-\alpha|$

$\boxed{5}$　$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$\boxed{6}$　$|z^n| = |z|^n$（n は実数）

$\boxed{5}$ に関して簡単に説明を加えておきましょう。

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

より，$|\alpha\beta|$ および $|\alpha||\beta|$ がいずれも正であることに注意して，$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ …… ☆

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{\alpha}{\beta}\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

より，$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$ および $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ がいずれも正であることに注意すれば，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ として式の成立が確認できます。

$\boxed{6}$ は，上記 ☆ を繰り返し考えれば OK です。

これらの性質は非常に重要です。問題を通して使い方を確認しましょう。

Ex.3　次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}+i$　　(2) $(2+3i)\left(\sqrt{3}-i\right)$

【1】 ❖ 737−012−001

$\alpha = -3+2i$，$\beta = 2+i$ のとき，次の複素数の表す点を複素数平面上に図示せよ。

(1) -2α (2) $\alpha+\beta$ (3) $\alpha-\beta$ (4) $\alpha+2\beta$

【2】 ❖ 737−012−002

次の複素数と共役な複素数を求めよ。

(1) $1+\sqrt{2}\,i$ (2) $\dfrac{1}{i}$ (3) $(3-2i)(1+i)$ (4) $\dfrac{2-i}{2+i}$

【3】 ❖ 737−012−003

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}+2i$ (2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (3) $(1-2i)^2$ (4) $\dfrac{i}{1+i}$

【4】 ❖ 737−012−004

複素数 α, β は，$|\alpha| = 3$，$|\beta| = 5$，$|\alpha+\beta| = 2\sqrt{13}$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}$ の値を求めよ。

(2) $|\beta-\alpha|$ の値を求めよ。

【5】 ❖ 737−012−005

複素数 α, β に対して，次の複素数が実数か，純虚数かを調べよ。

(1) $z = \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$

(2) $w = \alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$　ただし，$w \neq 0$

【6】 ❖ 737−012−006

複素数 z は絶対値が 1 で，z^3-z は実数である。このような複素数 z をすべて求めよ。

【7】 ❖ 737−012−007

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2| = 2$ であるような複素数 z を求めよ。

【8】 ❖ 737–012–008

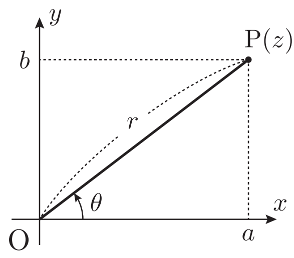
x に関する方程式 $x^4 - x^3 + x^2 - (a+2)x - a - 3 = 0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a の値をすべて求めよ。

Section 2 極形式

極形式

737-011-007

複素数平面上で，0 でない複素数 $z = a + bi$ を表す点を P とします。線分 OP の長さを $r(>0)$，すなわち，$|z| = r$ とし，実軸の正の部分から半直線 OP までの回転角を θ とすると，



$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$$

となります。

よって，複素数 z は，以下の通りに表すことができます。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r > 0)$$

この θ のことを，複素数 z の**偏角**といいます。また，このように複素数 z を絶対値 r と，偏角 θ を用いて表した形を**極形式**といいます。複素数 z の偏角 θ は $\arg z$ と表します。偏角は一般的に $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で表します。

極形式の乗法・除法

737-011-008

極形式で表された複素数の演算を確認しておきましょう。

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とするとき，以下が成り立ちます。

1. $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$
3. $|z_1z_2| = r_1r_2$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2}$
4. $\arg z_1z_2 = \theta_1 + \theta_2$，$\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$

〈証明〉

$\boxed{1}$　z_1z_2 について，

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$　$\dfrac{z_1}{z_2}$ について，

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\times\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}$$

　$\boxed{3}$ は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ で得られた複素数 z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ の絶対値であり，$\boxed{4}$ も $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ で得られた複素数 z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ の偏角なので，いずれも成立は明らかです。

Ex.1　次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

(1)　$(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$　　(2)　$\dfrac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}$

(3)　$2(\sin 60^\circ + i\cos 60^\circ)$

回転と定数倍　737－011－009

　$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とし，$z_3 = z_1z_2$ とすると，先ほど紹介した性質より，

$$|z_3| = r_1r_2,\ \arg z_3 = \theta_1 + \theta_2$$

であることがわかります。

　このとき，点 z_3 は「z_1 を原点を中心として θ_2 だけ回転し，r_2 倍拡大した点」を表しています。つまり，複素数同士の掛け算や割り算は「回転 ＋ 定数倍」をするイメージです。

　また，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると，$|\alpha| = 1$ ですから，点 αz は「点 z を原点を中心として θ だけ回転した点」を表します。

ド・モアブルの定理

◈ 737－011－010

複素数 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ について，次の**ド・モアブルの定理**が成り立ちます。

ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{(ただし，} n \text{ は整数)}$$

これは，複素数の掛け算（先ほどの $\boxed{1}$）を繰り返し用いることで理解ができるでしょう。

これにより，複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると，

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{(ただし，} n \text{ は整数)}$$

が成り立つことがわかります。複素数の極形式のメリットは，この累乗の形を作ったときに，その計算がとても簡単に行えることです。ド・モアブル最高！

Ex.2 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2020}$ を求めよ。ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする。

【9】 ※ 737-012-009

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満の範囲とする。

(1) $\sqrt{3}+i$　(2) -2　(3) $3i$　(4) $\dfrac{1-i}{2i}$

【10】 ※ 737-012-010

次の 2 つの複素数について，z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ の絶対値と偏角をそれぞれ求めよ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満の範囲とする。

(1) $z_1=1-\sqrt{3}\,i,\ z_2=-1+i$　(2) $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ z_2=-1+\sqrt{3}\,i$

【11】 ※ 737-012-011

次の式の値を求めよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^5$　(2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^6$

(3) $(-1+i)^4$　(4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{-12}$

【12】 ※ 737-012-012

$z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$ について，

(1) $\dfrac{z}{1+i}$ を $a+bi$ の形に表せ。ただし，$a,\ b$ は実数とする。

(2) z を極形式で表せ。

(3) z^{12} を計算せよ。

【13】 ※ 737-012-013

2 つの 0 でない複素数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\qquad (r_1>0)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\qquad (r_2>0)$$

があるとき，次の問いに答えよ。

(1) $|z_1+z_2|$ を $r_1,\ r_2,\ \theta_1,\ \theta_2$ を用いて表せ。

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。また，等号が成立する条件を答えよ。

$$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$$

【14】 ※ 737-012-014

複素数 $\alpha = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ について，α^n が正の実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

【15】 ※ 737-012-015

以下の空欄に当てはまる値を求めよ。

(1) 複素数 $\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}$ の偏角は $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(2) $\left(\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n$ が実数となるような最小の自然数 n は，$n = \boxed{\text{イ}}$ である。またそのとき，$\left(\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^n$ の絶対値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

【16】 ※ 737-012-016

複素数 z は，$z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たす。

(1) 複素数 z の値を求めよ。

(2) $\alpha = z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。

【17】 ※ 737-012-017

I　以下は，ある問題に対しての A さん，B さん，C さんの会話である。問題と会話文を読み，後の問いに答えよ。

問題：$z^2 = i$ を満たす複素数 z を求めよ。

A「$z = \pm\sqrt{i}$ で解けるね！」

B「それは ① 良くないよ！。② $z = a + bi$ （a, b は実数）とおいて解くのが良いと思うよ。」

C「それもいいけど，③ ド・モアブルの定理を使うっていう手もあるよね！」

(1) ① の理由を述べよ。

(2) ② を実行せよ。

(3) ③ を実行せよ。

II　$z^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を解け。

【18】 ※ 737–012–018

方程式 $z^6=1$ を解け。

【19】 ※ 737–012–019

方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

【20】 ※ 737–012–020

$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ を求めたい。

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

とおく。$z^n=1$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\quad ア \quad}$ であるから，z は方程式

$$z^4+\boxed{\quad イ \quad}z^3+z^2+z+1=0$$

の解となる。そこで，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと，w は方程式

$$w^2+\boxed{\quad ウ \quad}w-\boxed{\quad エ \quad}=0$$

の解となる。$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{2\pi}{5}-i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ および $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ であることから，

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\boxed{\quad オ \quad}$$

を得る。

Introduction

◈ 737－010－003

Section 3 複素数と図形

複素数平面はベクトルと同じように考えられることは§１で触れました。複素数と図形との関係について確認をしていきましょう。

内分点・外分点・重心

◈ 737－011－011

a, b, c, d をいずれも実数としたとき，複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ が表す点をそれぞれ A，B とします。実平面上では点 A，B はそれぞれ $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ と表すことができます。線分 AB を $m:n$ に内分する点は，実平面上では，

$$\left(\frac{na+mc}{m+n},\ \frac{nb+md}{m+n}\right)$$

と表すことができます。

したがって，複素数平面上でも同様に考え，点 γ が線分 AB を $m:n$ に内分するとき，

$$\gamma=\frac{na+mc}{m+n}+\left(\frac{nb+md}{m+n}\right)i=\frac{n(a+bi)+m(c+di)}{m+n}=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$$

となることがわかります。外分点や重心も同様に考えると，以下が成り立ちます。

> ① 線分 AB を $m:n$ に内分する点を表す複素数は，$\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$
>
> ② 線分 AB を $m:n$ に外分する点を表す複素数は，$\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m+(-n)}$
>
> ③ 線分 AB の中点を表す複素数は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
>
> ④ 3 点 α, β, γ を頂点とする三角形の重心を表す複素数は，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

Ex.1 3 点 A(i), B$(-1-2i)$, C(3) があるとき，次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 BC を 2 : 1 に内分する点 P

(2) 線分 BA を 4 : 1 に外分する点 Q

(3) 四角形 ABCD が平行四辺形になるときの頂点 D

(4) 三角形 ABC の重心 G

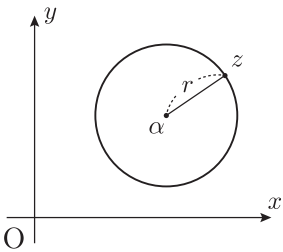
複素数と円　※ 737－011－012

複素数を用いて，円の方程式を考えてみましょう。

中心が点 α，半径が r の円の方程式を考えてみます。円周上に点 z をとると，点 α と点 z の距離は常に定数 r になるので，

$$|z-\alpha|=r$$

となります。これが円の方程式となります。



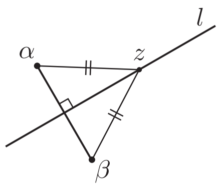
Ex.2　方程式 $|z+2i|=2$ を満たす点 z が表す図形はどのような図形か答えよ。また図示せよ。

垂直二等分線　※ 737－011－013

右図のように，2 点 α, β を端点とする線分の垂直二等分線 l の方程式を考えてみましょう。l 上の点 z は，点 α までの距離と点 β までの距離が等しいので，

$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

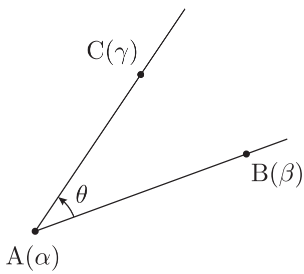
となります。



Ex.3　方程式 $|z+i|=|z-3i|$ を満たす点 z が表す図形はどのような図形か答えよ。また図示せよ。

2 直線のなす角　※ 737－011－014

複素数平面で，同一直線上にない異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を考えます。このとき，$\angle\mathrm{BAC}$ は複素数を用いてどのように表すことができるでしょうか。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ として，θ を α, β, γ で表してみましょう。



k を実数として，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1:k$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を θ だけ回転して k 倍したものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ですから，

$$\gamma-\alpha=k(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

となります。よって，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k(\cos\theta+i\sin\theta)\quad\cdots\cdots ①$$

となるので，

$$\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

となることがわかります。

この式は後々非常によく使うので覚えておきましょう。

共線条件　※ 737- 011 - 015

複素数平面上の異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が同一直線上にある条件を考えてみましょう。このとき，$\arg \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$ または π となるので，k を実数として，① より，

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = k(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{または} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = k(\cos \pi + i \sin \pi)$$

となります。よって，$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm k$ となることから，次が成り立ちます。

> $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数 $\Leftrightarrow$ 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が同一直線上にある

直交条件　※ 737- 011 - 016

複素数平面上の異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ があるとき，$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ となる条件は，$\arg \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことなので，k を実数として，① より，

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = k\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (\text{複号同順})$$

すなわち，

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm ki$$

が得られます。すなわち，次が成り立ちます。

> $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数 $\Leftrightarrow$ 直線 AB，AC が垂直に交わる

平行条件

※ 737−011−017

複素数平面上の異なる 4 点を $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$, $\mathrm{D}(\delta)$ とします。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となる条件を考えてみましょう。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が平行となる条件は，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことができます。これを複素数で表すと，

$$\delta - \gamma = t(\beta - \alpha)$$

より，

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = t$$

となります。

$\dfrac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$ が実数 $\Leftrightarrow$ 直線 AB と直線 CD は平行となる

【21】 ※ 737－012－021

$\alpha = 3 - 2i$，$\beta = 9 - 5i$ の表す点をそれぞれ A，B とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点
(2) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点
(3) 線分 AB の中点
(4) 原点を O とするとき，△OAB の重心

【22】 ※ 737－012－022

次の等式を満たす点 z は，複素数平面上でどのような図形を描くか図示せよ。

(1) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$　　(2) $|z - 2| = |z - 4i|$

【23】 ※ 737－012－023

複素数平面上の点 z が条件 $2|z - i| = |z + 2i|$ を満たすとき，点 z はどのような図形を描くか図示せよ。

【24】 ※ 737－012－024

複素数 $2 - i$ に対応する点を z とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 z を原点 O の周りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点を求めよ。
(2) 点 z を点 $\mathrm{A}(1 + 3i)$ の周りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を求めよ。

【25】 ※ 737－012－025

複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(2 - 2i)$，$\mathrm{B}(4 - i)$，$\mathrm{C}(3 + i)$ がある。このとき，∠BAC の大きさを求めよ。

【26】 ※ 737－012－026

複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(4 + 5i)$，$\mathrm{B}(-2 + i)$，$\mathrm{C}(3 + xi)$ がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 点 A，B，C が一直線上にあるように，実数 x の値を定めよ。
(2) 2 直線 AB，AC が垂直に交わるように，実数 x の値を定めよ。

【27】 ※ 737–012–027

(1) 等式 $|z|=|z-1|=1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた複素数のうち，偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が最小となるものを w とする。このとき，$w^n=1$ を満たす自然数 n を小さいものから 3 つ求めよ。

【28】 ※ 737–012–028

複素数平面上で z と z^5 が原点 O に関して点対称の位置にあるとき，z の値を求めよ。ただし，$z \neq 0$ とする。

【29】 ※ 737–012–029

I　複素数平面上の点 z に次の移動を行った点について，空欄にあてはまる数式を z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表せ。

z を実軸に関して対称移動した点は $\boxed{\text{ア}}$ で，z を虚軸に関して対称移動した点は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，z を原点に関して対称移動した点は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

II　複素数平面上に，原点 O と異なる点 $\mathrm{A}(1+2i)$ があり，2 点 O，A を通る直線を l とする。直線 l に関して，点 $\mathrm{B}(5+5i)$ と対称な点を求めよ。

【30】 ※ 737–012–030

I　原点を O とする複素数平面上で $1+i$ に対応する点を A とする。△OAB が正三角形であるとき，点 B の表す複素数を求めよ。

II　複素数平面上で 3 点 $\alpha=1-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=4-\sqrt{3}\,i$，γ があり，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする。△ABC が $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，γ を求めよ。

【31】 ※ 737–012–031

異なる複素数 α, β, γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする △ABC はどのような三角形か。

【32】 ※ 737– 012 – 032

複素数平面上に三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB，ACE とがある。ただし，点 C，点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また，点 B，点 E は直線 AC に関して反対側にある。線分 AB の中点を K，線分 AC の中点を L，線分 DE の中点を M とする。線分 KL の中点を N とするとき，直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ。

【33】 ※ 737– 012 – 033

-1 と異なる複素数 z に対し，複素数 w を $w=\dfrac{z}{z+1}$ で定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) z が複素数平面の虚軸上を動くとき，w が描く図形を図示せよ。

(2) z が複素数平面上の円 $|z-1|=1$ 上を動くとき，w が描く図形を図示せよ。

【34】 ※ 737– 012 – 034

z を複素数とし，i を虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

【35】 ※ 737– 012 – 035

複素数 z が $|z| \leqq 1$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $z+2i$ の存在する領域（範囲）を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(z+2i)^2$ の絶対値 r の範囲を求めよ。

(3) $(z+2i)^2$ の偏角 θ の範囲を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。